Projeções

Prof. Márcio Bueno
{cgtarde,cgnoite}@marciobueno.com

Projeções

- Visão humana: enxerga em 2D, a sensação de profundidade vem da diferença entre as vistas esquerda e direita do mesmo objeto
- Projeção: conversão genérica de entidades de uma dada dimensão para outra de menor ordem
- CG:
  - conversão 3D para 2D

Projeções

- Visão humana: enxerga em 2D, a sensação de profundidade vem da diferença entre as vistas esquerda e direita do mesmo objeto
- As *projeções* transformam pontos de uma dimensão *n* em uma dimensão *m* menor que *n*
  - Exemplo (utilizado em CG): $R^3 \rightarrow R^2$ ou $(x,y,z) \rightarrow (x,y)$

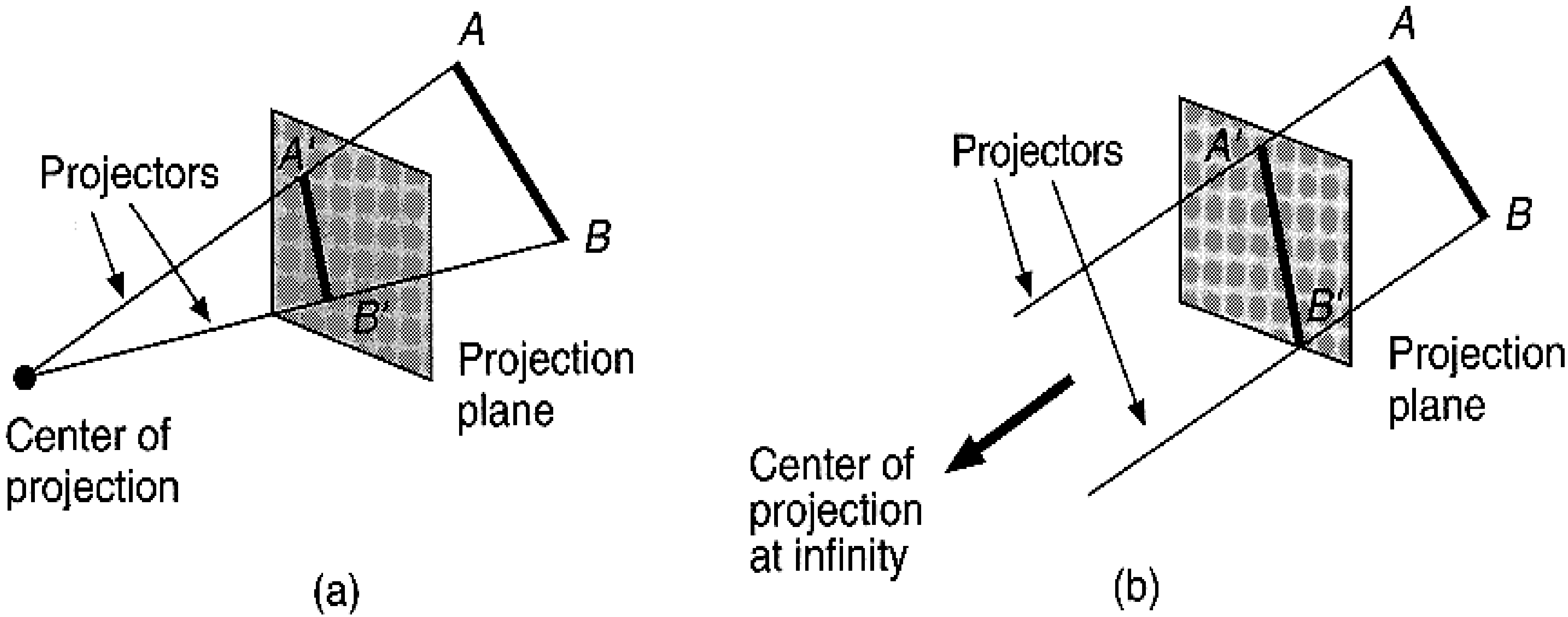
Tipos de projeção

- Projeções Geométricas Planares
  - Projeção em Perspectiva (de grande interesse em CG)
    - Projetores originam-se em um centro de projeção
  - Projeção Paralela
    - Projetores paralelos a uma direção de projeção
- Determinam a projeção:
  - plano de projeção: quadro
  - centro de projeção: ponto de vista
- A projeção de um objeto 3D é definida por raios de projeção (projetoras) saindo de um centro de projeção, passando por cada ponto do objeto, e interseccionando o plano de projeção para formar a projeção

Tipos de Projeções

- Proj. Paralelas (cilíndricas): tem um ponto impróprio como centro de projeção - isto é; as linhas visuais encontram-se no infinito. Mantém a proporcionalidade da figura.
- Proj. Perspectiva (cônica): o centro de projeção é um ponto próprio, em coordenadas finitas no sistema tridimensional. Esta projeção deforma a figura, diminuindo os objetos mais distantes e distorcendo os ângulos.

Projeções Perspectiva e Paralela



- **Projeções**
  - **Perspectiva** *(projetantes **NÃO** paralelas)*
    - **Pontos de Fuga Principais**
      - 1 ponto
      - 2 pontos
      - 3 pontos
  - **Paralela** *(projetantes paralelas)*
    - **Oblíqua** — *Projetantes **NÃO** perpendiculares ao plano de projeção*
    - **Ortogonal** — *Projetantes perpendiculares ao plano de projeção*
      - **Vistas** — *Plano de projeção paralelo aos planos principais*
        - *três vistas*
        - *vistas auxiliares*
        - *vistas seccionais*
      - **Axonométricas** — *Plano de projeção **NÃO**paralelo aos planos principais*
        - *isométrica*
        - *dimétrica*
        - *trimétrica*

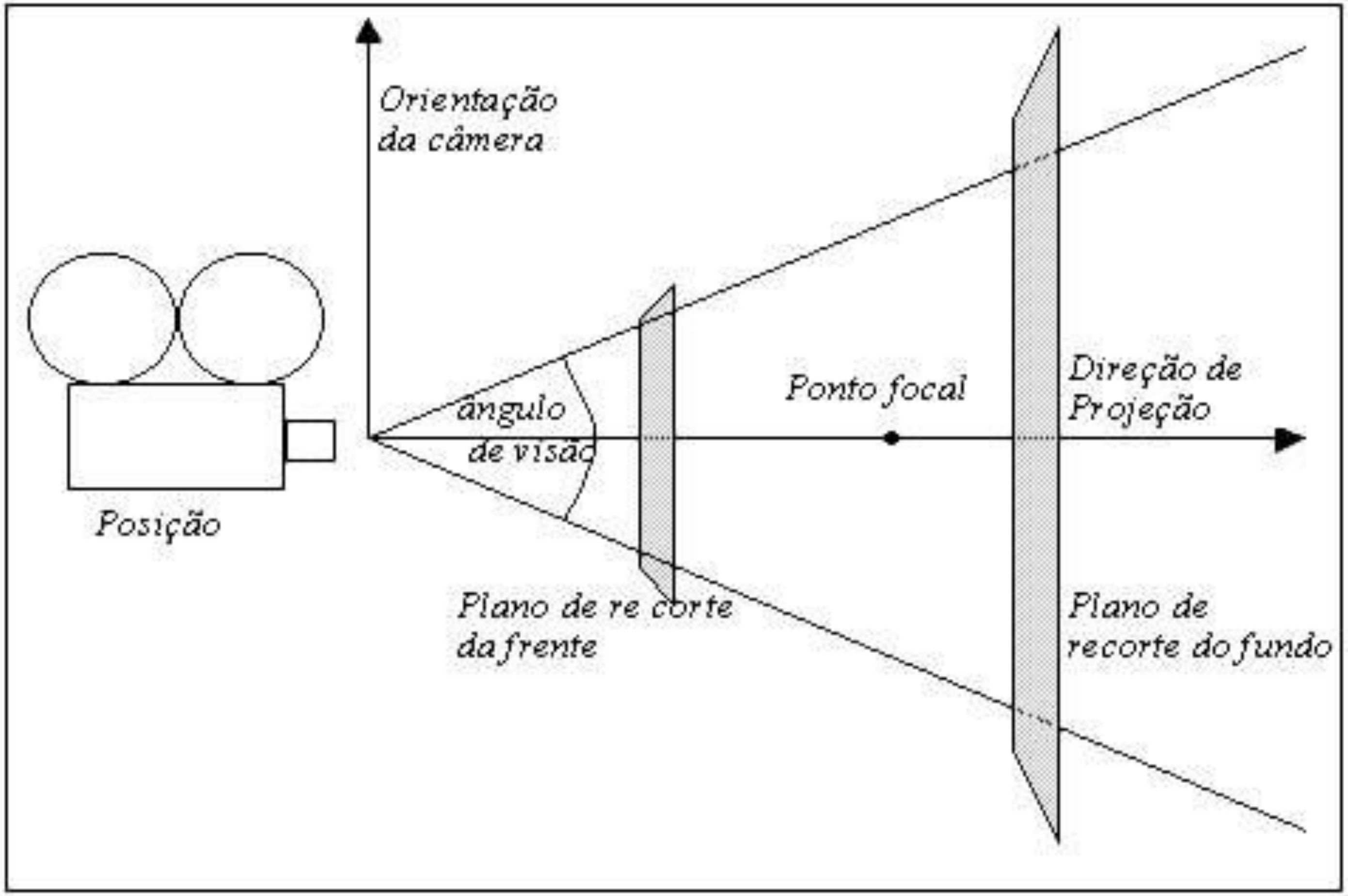
Transformação de Projeção

- Projeções: forma específica de transformação geométrica
- necessidade de identificar matrizes 4x4 que, aplicadas a um dado ponto do espaço obtenham o ponto no plano equivalente
- o objeto a ser projetado deve estar descrito em relação a um sistema de coordenadas de tal forma que as direções principais do mesmo coincidam com os eixos do sistema
- o plano de projeção é um plano vertical, colocado perpendicularmente ao eixo z do sistema de coordenadas do objeto
- o objeto encontra-se modelado convenientemente por um conjunto de pontos

Transformação de Projeção

- Obs: havendo mais de um objeto em cena é necessário uma conversão entre os sistemas de coordenadas do objeto e da cena. Os pontos de cada objeto devem ser convertidos para o sistema global por uma transformação de mudança de base, antes de se efetuar as transformações de projeção.

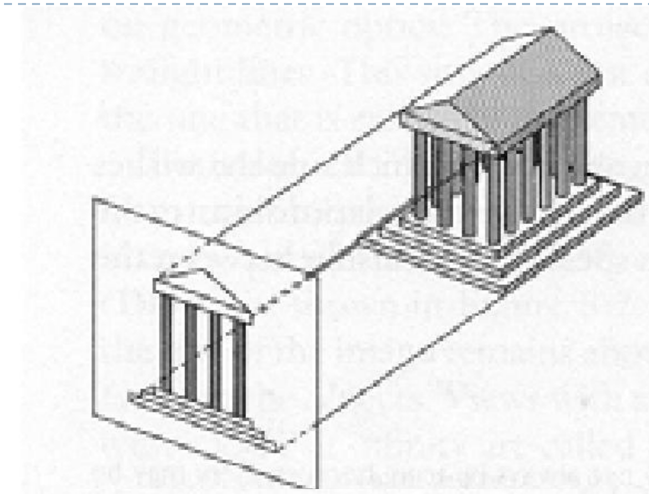
Projeção



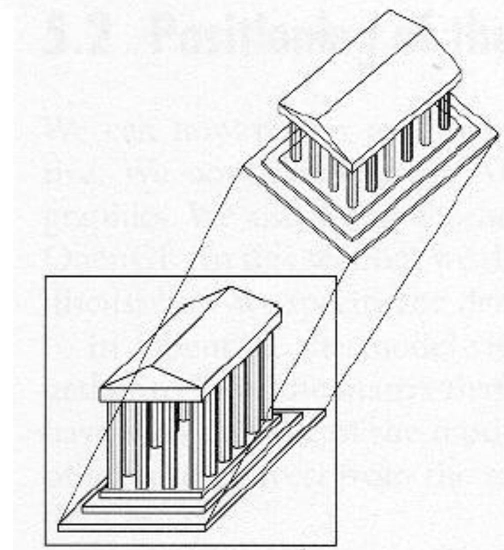
Atributos da câmera [Schröeder et al. 1998].

Projeções Cilíndricas - Paralelas

- Ortogonais:
  - a direção de projeção é a mesma direção da normal ao plano de projeção



- Oblíqua:
  - a direção de projeção não é a mesma direção da normal ao plano de projeção
  - permite a vista de mais de um lado do objeto



Projeções Ortogonais ou Ortográficas

- Vistas: coleção das vistas de topo, frente e lado do objeto
- Plano de projeção paralelo aos eixos principais

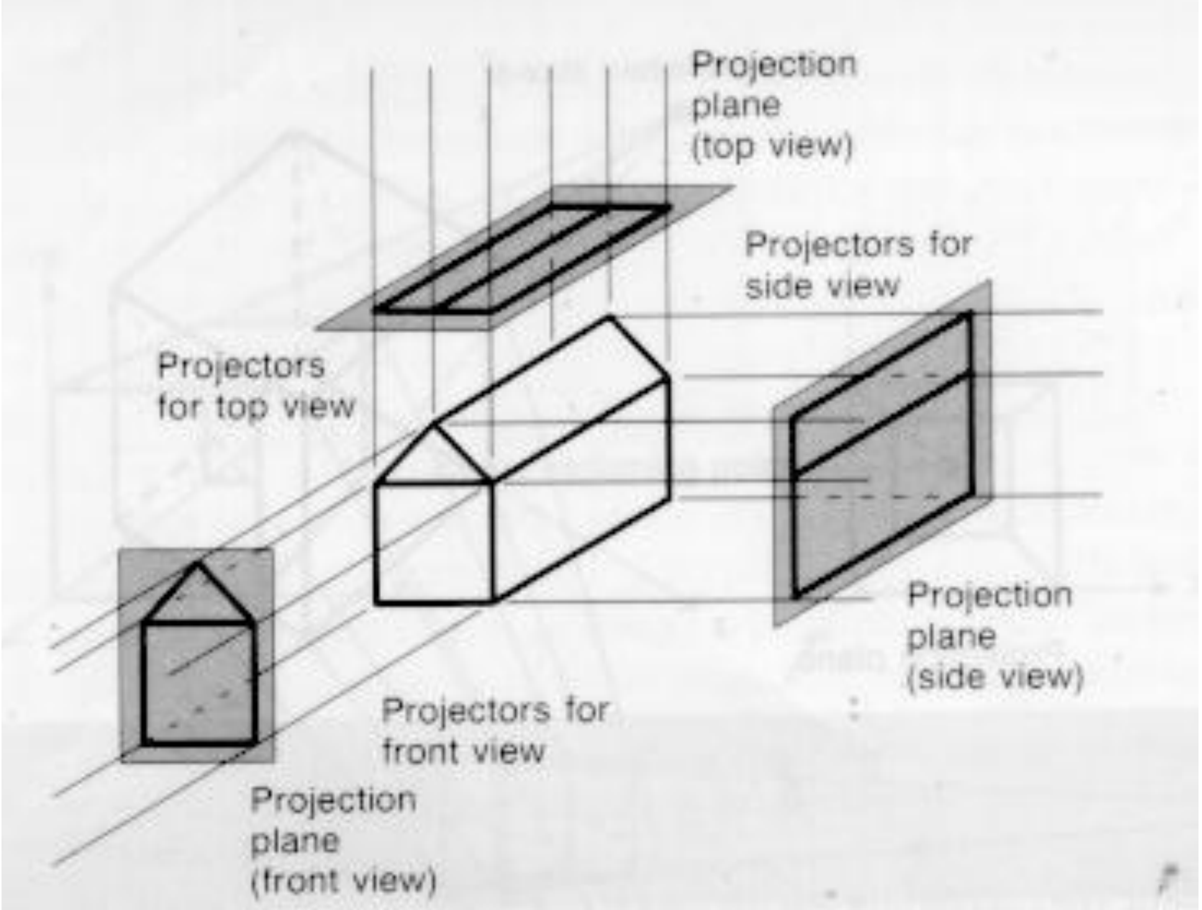
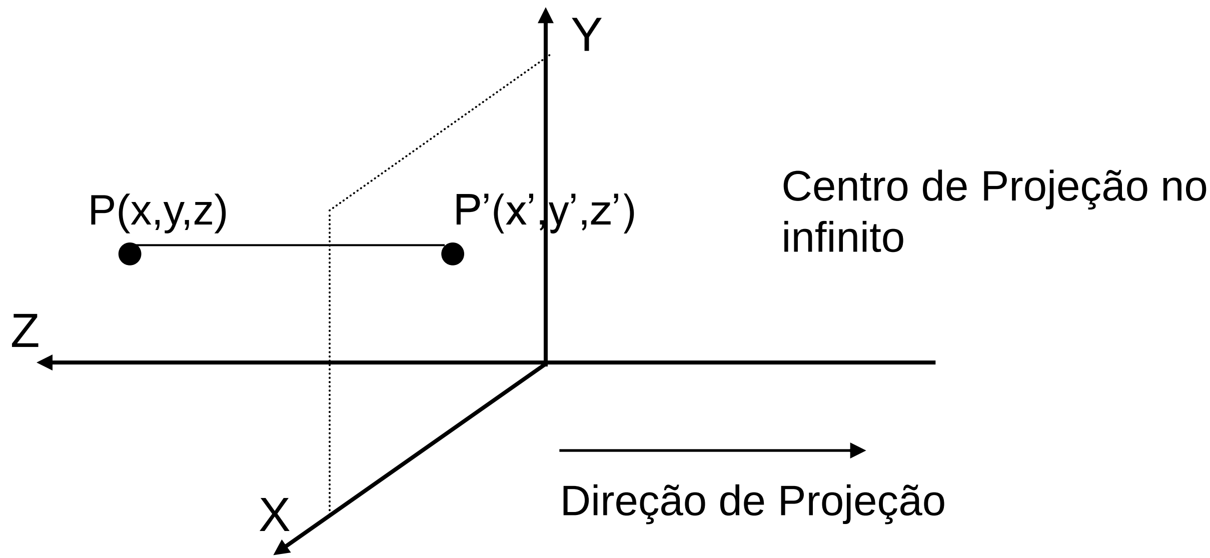


Fig. 6.6 Construction of three orthographic projections.

Projeção Ortogonal ou Ortográfica: Descrição Matemática

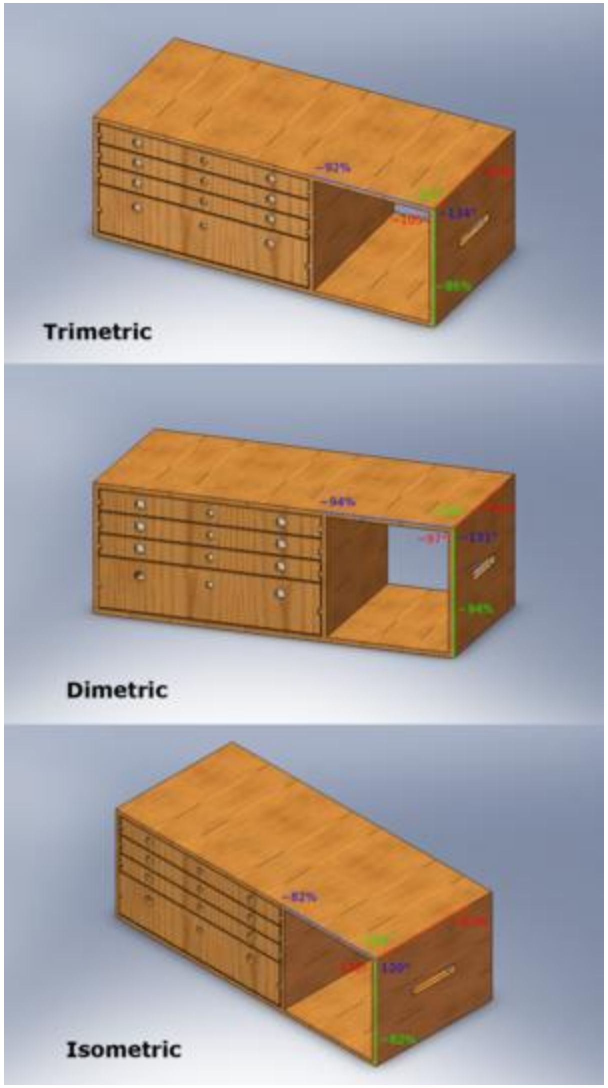


Forma matricial:

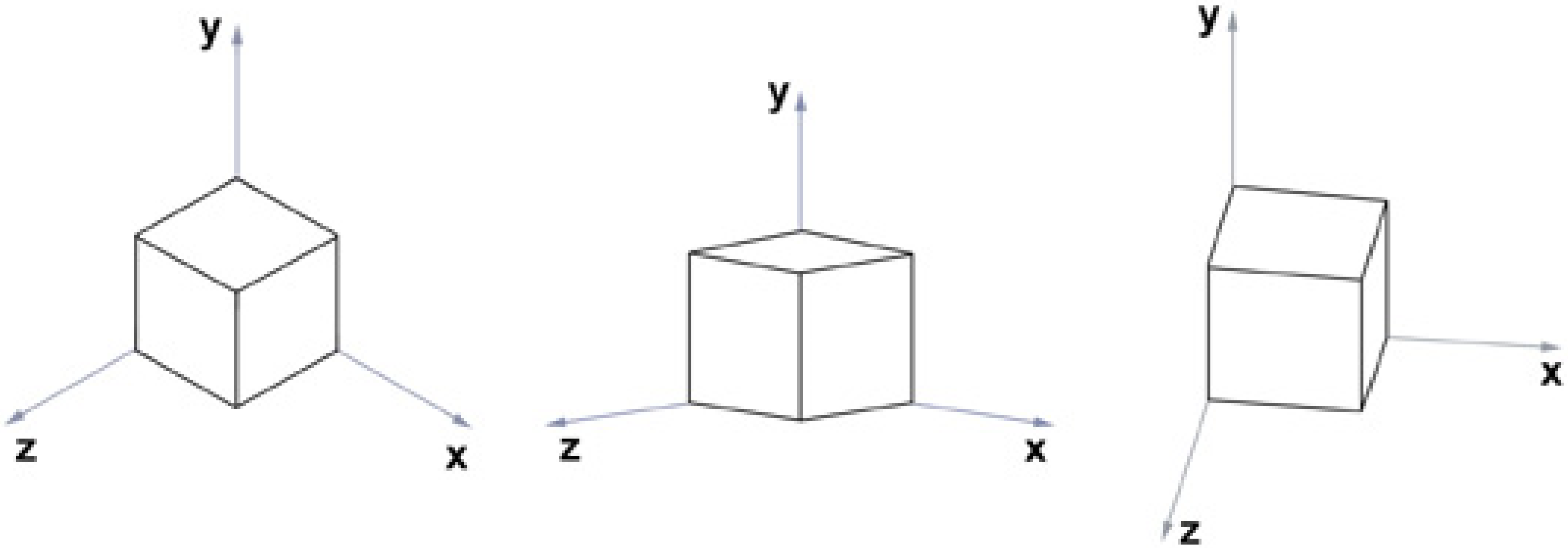
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeções Axonométricas

- Usadas para dar sensação 3D, a partir da proj. paralela
- mostra mais de uma face do objeto projetado
- o plano de projeção não pode ser perpendicular a um eixo principal e estão classificadas em:
  - *isométrica*
  - *dimétrica*
  - *trimétrica*

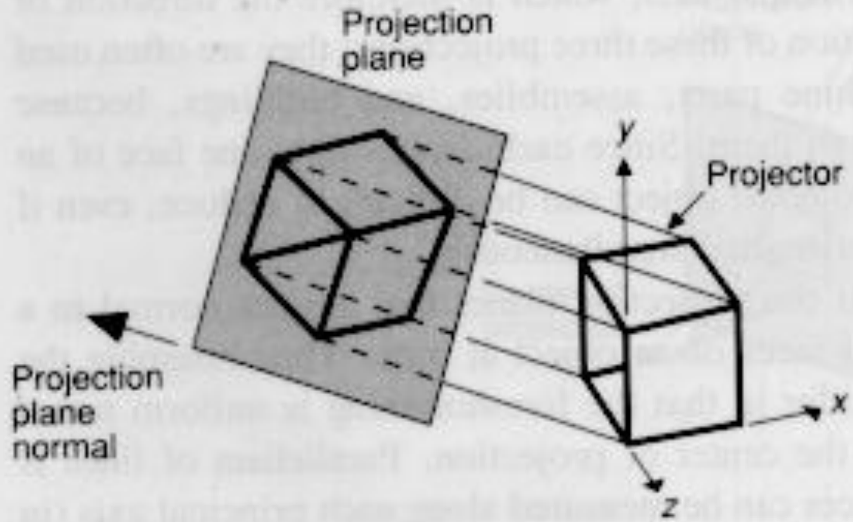


Projeções Axonométricas



Projeções Axonométricas

- **Projeção isométrica**: a normal ao plano de projeção faz ângulos iguais com cada um dos eixos principais.



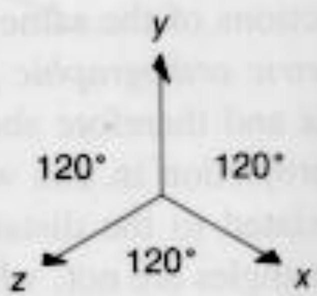
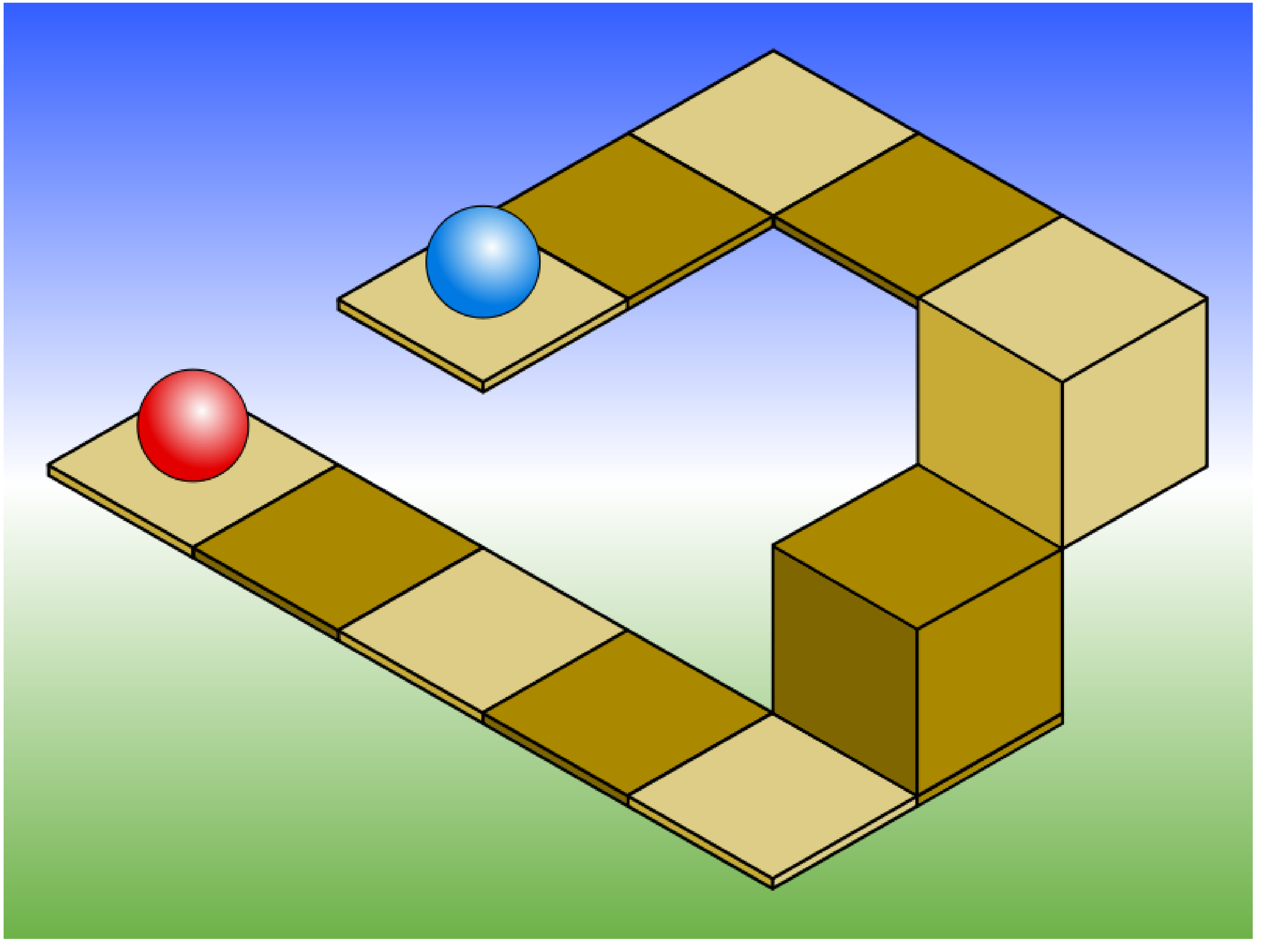


Fig. 6.7 Construction of an isometric projection of a unit cube. (Adapted from [CARL78], Association of Computing Machinery, Inc.; used by permission.)

Fig. 6.8 Isometric projection of unit vectors, with direction of projection (1, 1, 1).

Falha de Projeção Isométrica



Projeções Oblíquas

- Fornecem sensação espacial e permitem medidas
- a direção de projeção não forma 90° com o plano de projeção, mas,
- o plano de projeção é paralelo a um dos 3 eixos
- Geralmente:
  - faz-se uma face paralela ao plano de projeção (normalmente, a face que tem mais detalhes)
  - a face paralela projeta-se em sua verdadeira grandeza
  - não há deformação das formas desta face.

Projeções Oblíquas

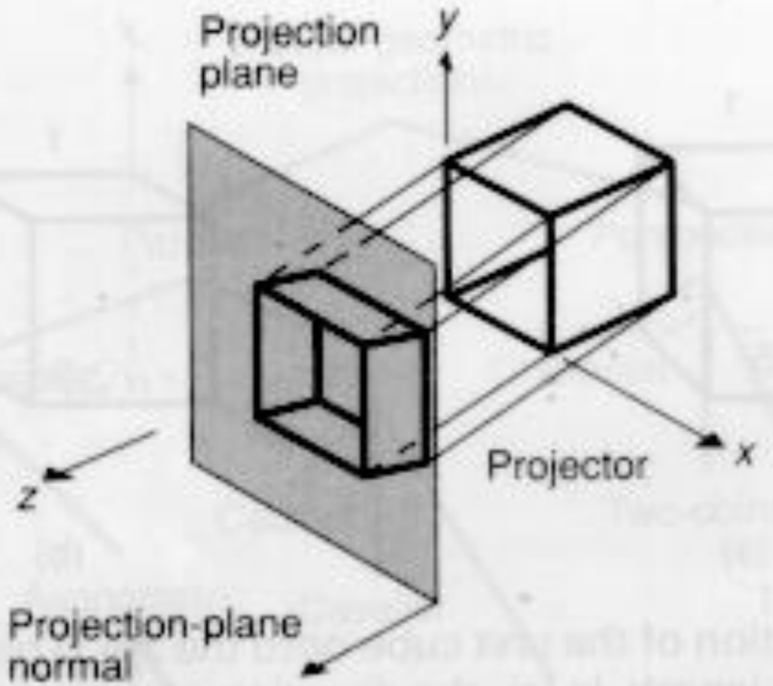
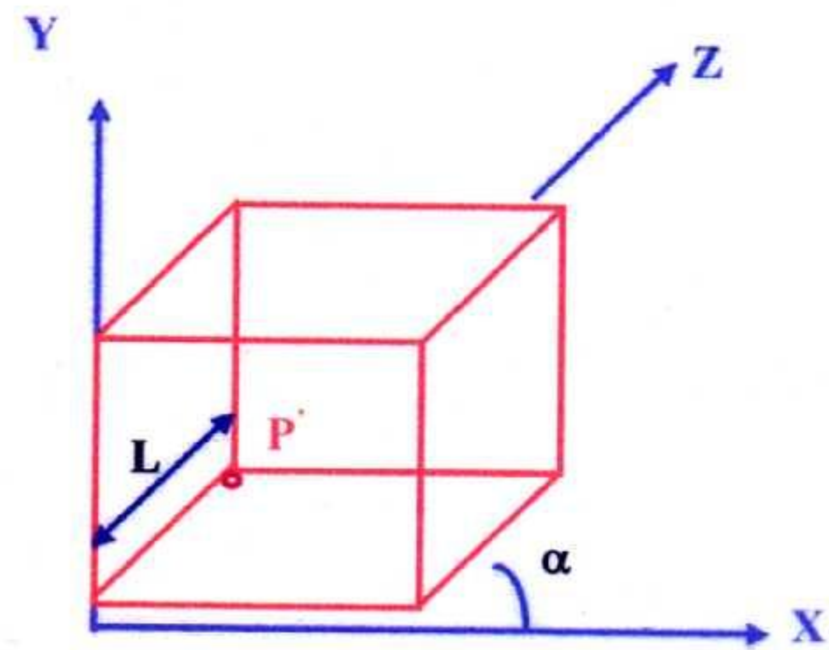


Fig. 6.9 Construction of oblique projection. (Adapted from [CARL78], Association for Computing Machinery, Inc.; used by permission.)

Projeções Oblíquas

- Seja o cubo unitário da figura, deseja-se projetá-lo no plano xy:



Projeções Oblíquas

Matemática da projeção:

- o ponto (0,0,1) é projetado em xy como (L.cosα, L.senα), levando a outro ponto no espaço dado por P´(L.cosα, L.senα, 0)
- Como a linha projetora deve passar por P e P´, sendo as demais paralelas a ela, temos, considerando a equação simétrica da reta:

$$\frac{x - x_p}{L.\cos\alpha} = \frac{y - y_p}{L.\sin\alpha} = \frac{z}{-1}; \text{ destas relacoes, temos}$$

$$\frac{x - x_p}{L.\cos\alpha} = -z \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x_p} = x + z.L\cos\alpha$$

$$\text{e} \quad \mathrm{y_p} = y + z.L\sin\alpha$$

Projeções Oblíquas

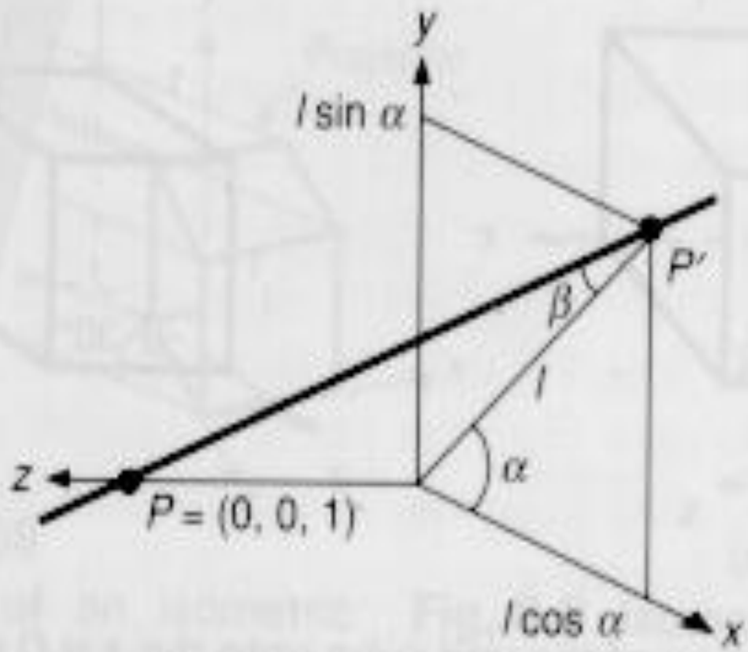


Fig. 6.12 Oblique parallel projection of $P = (0, 0, 1)$ onto $P' = (l \cos \alpha, l \sin \beta, 0)$. The direction of projection is $P' - P = (l \cos \alpha, l \sin \beta, -1)$.

Projeções Oblíquas

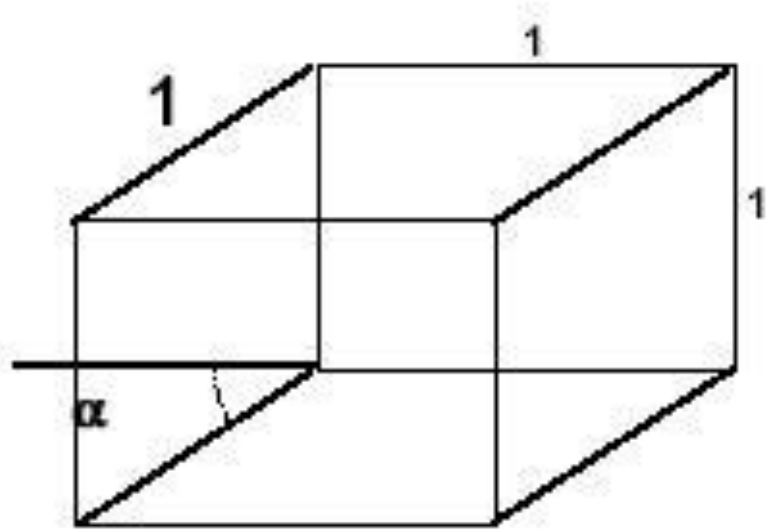
- Matriz da projeção:

$$P\text{obl.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{l.}\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \text{l.}\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeções Oblíquas

Se L = l e α = 45° (β= 45°) => projeção cavaleira (cavalier)

A projeção de uma linha perpendicular ao plano de projeção é de mesmo comprimento que a linha em si



Cavaleira

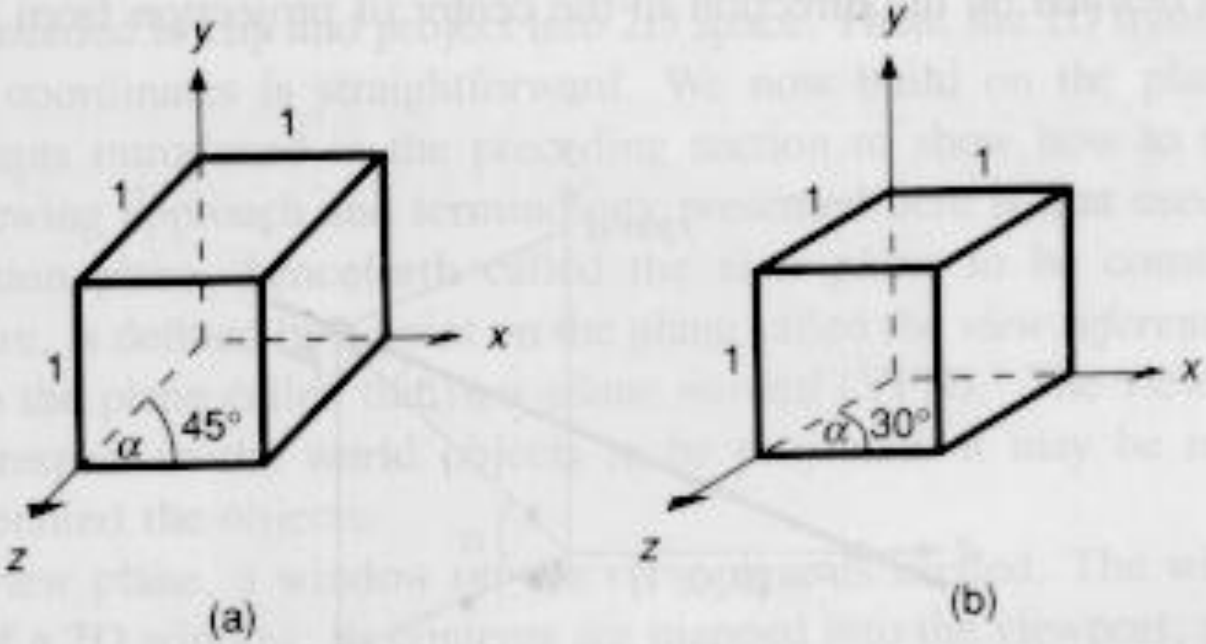
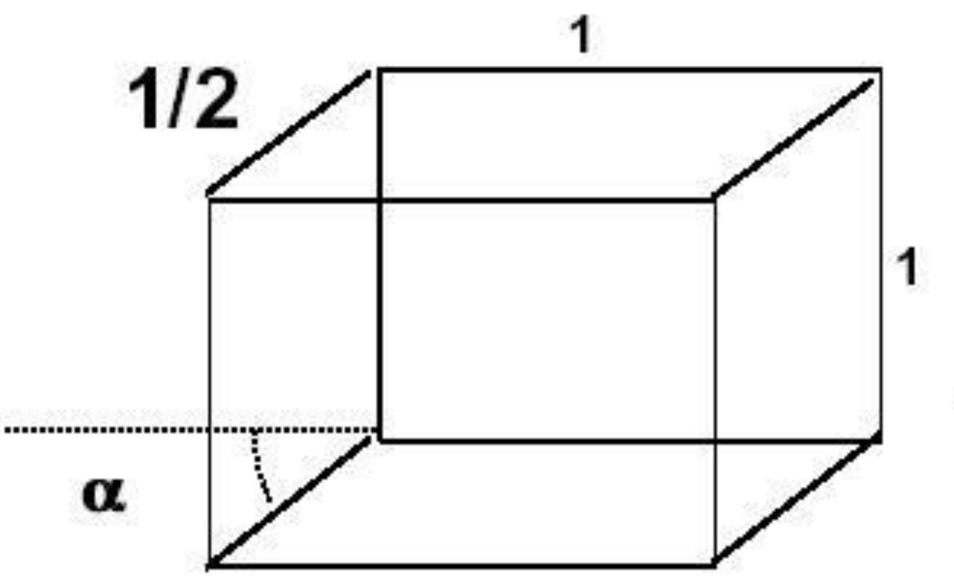


Fig. 6.10 Cavalier projection of the unit cube onto the $z = 0$ plane. All edges project at unit length. In (a), the direction of projection is $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -1)$; in (b), it is $(\sqrt{3}/2, 1/2, -1)$.

Projeções Oblíquas

- Se L = 1/2 e α = 45°(β = arctg 2 - aprox: 63,4°) a projeção é dita gabinete (cabinet)
- Direção de projeção forma aproximadamente 63,4° com o plano de projeção
- A projeção de uma linha perpendicular ao plano de projeção é da metade do comprimento que a linha em si



Gabinete

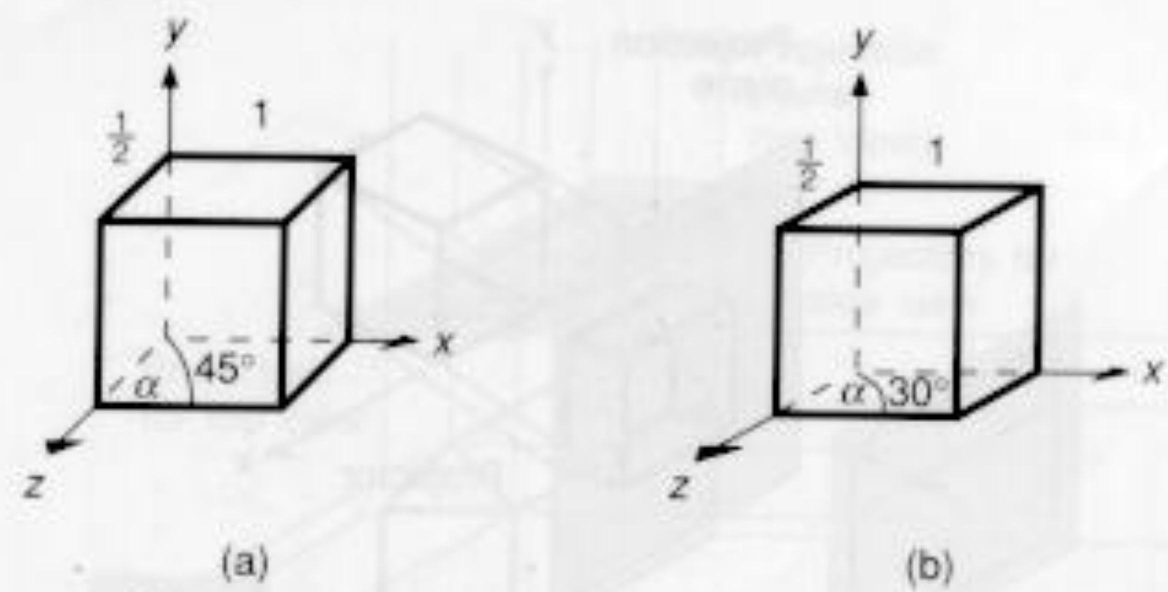
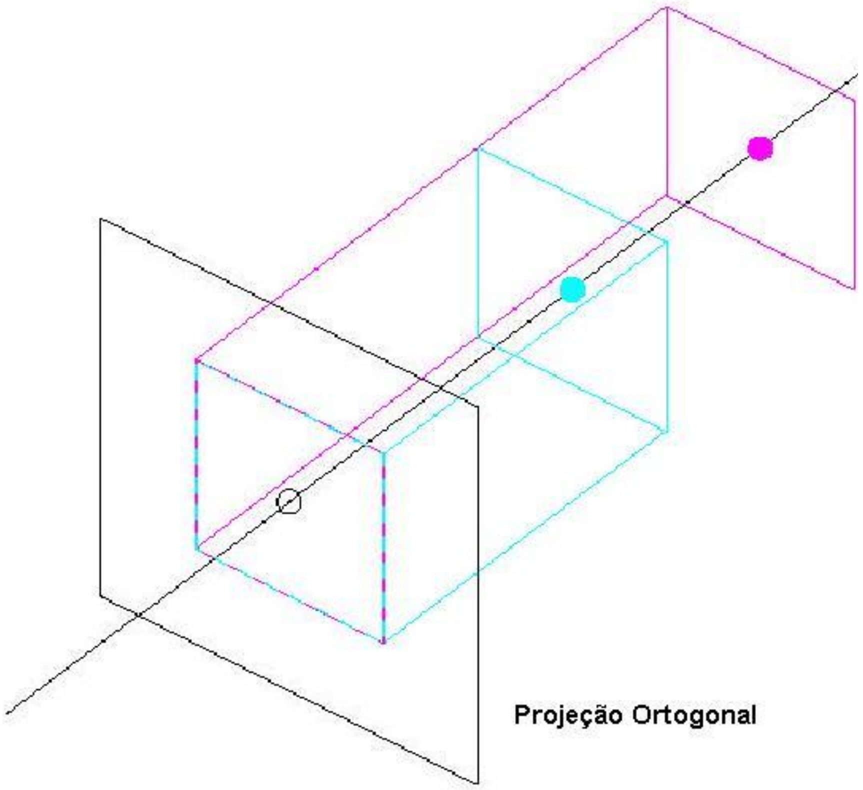
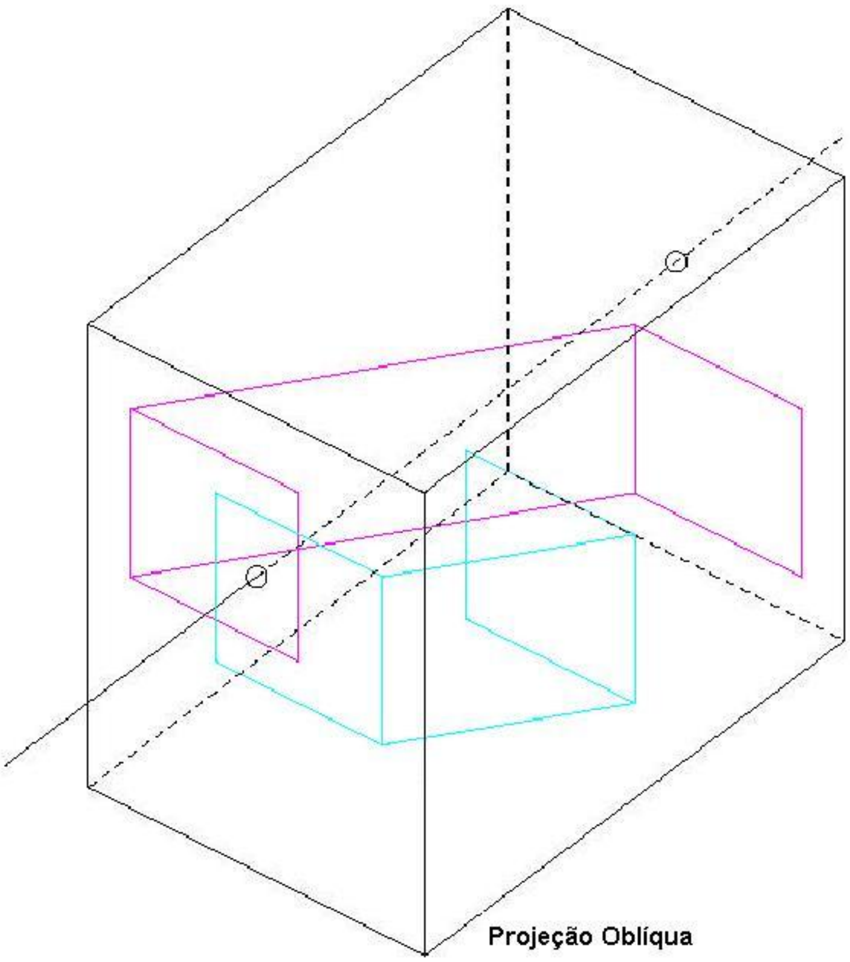


Fig. 6.11 Cabinet projection of the unit cube onto the $z = 0$ plane. Edges parallel to the x and y axes project at unit length. In (a), the direction of projection is $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, -1)$; in (b), it is $(\sqrt{3}/4, 1/4, -1)$.

Comparações





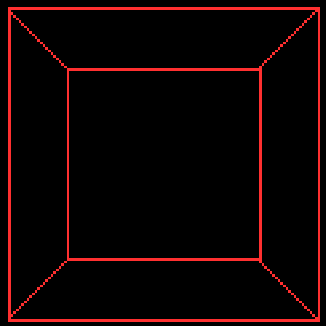
Projeções Perspectivas

- Fortemente determinada pelo centro de projeção
- similar à câmaras de vídeo e ao olho humano
- imagem parece mais realista
- não preserva ângulos (apenas em faces do objeto paralelas ao plano de projeção)
- não preserva escalas

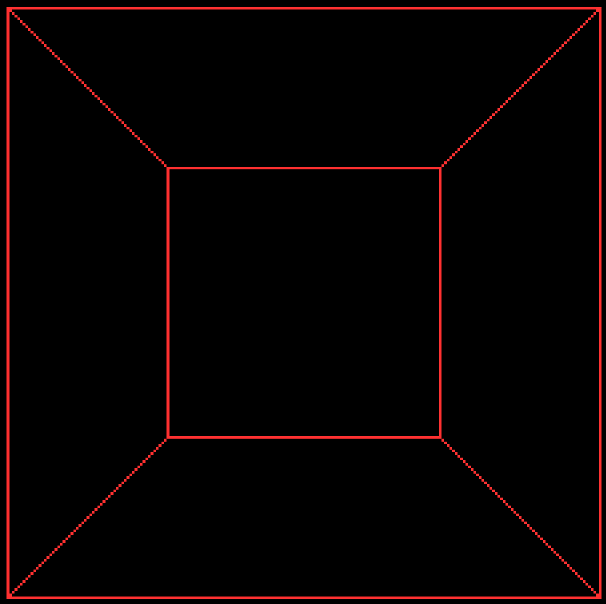
Projeções Perspectivas

- não permite medidas diretas
- objetos mais distantes parecem menores
- retas paralelas se encontram em um ponto: ponto de fuga
- pode haver: 1, 2, 3 pontos de fuga.

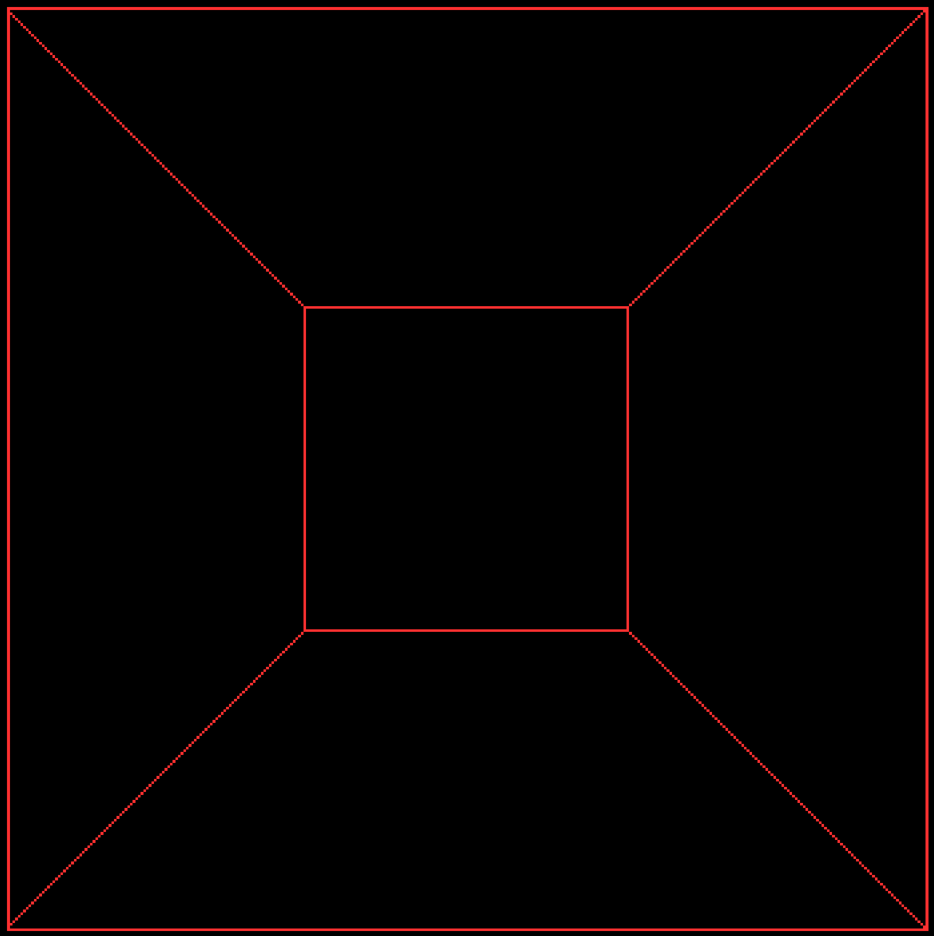
Projeção em Perspectiva (Impressão Visual)



Projeção em Perspectiva (Impressão Visual)

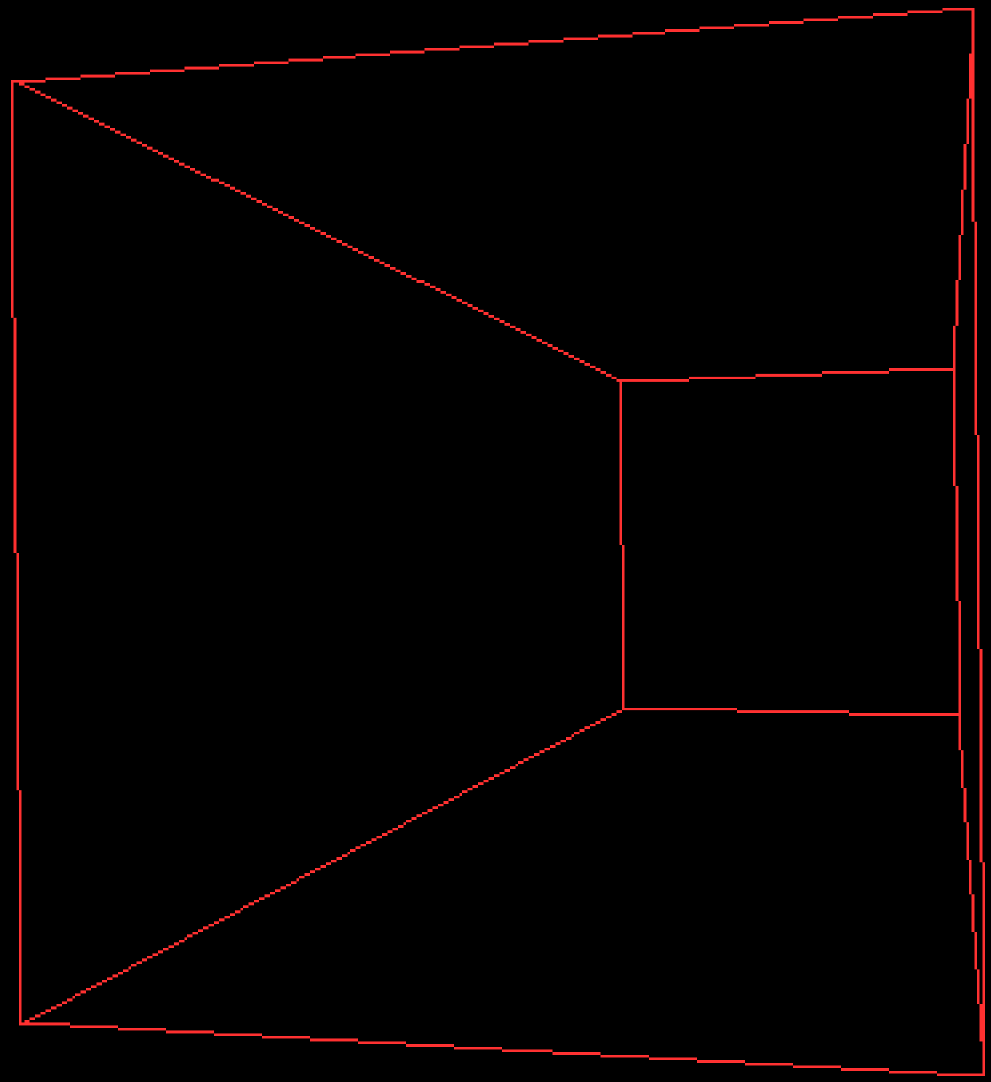


Projeção em Perspectiva (Impressão Visual)

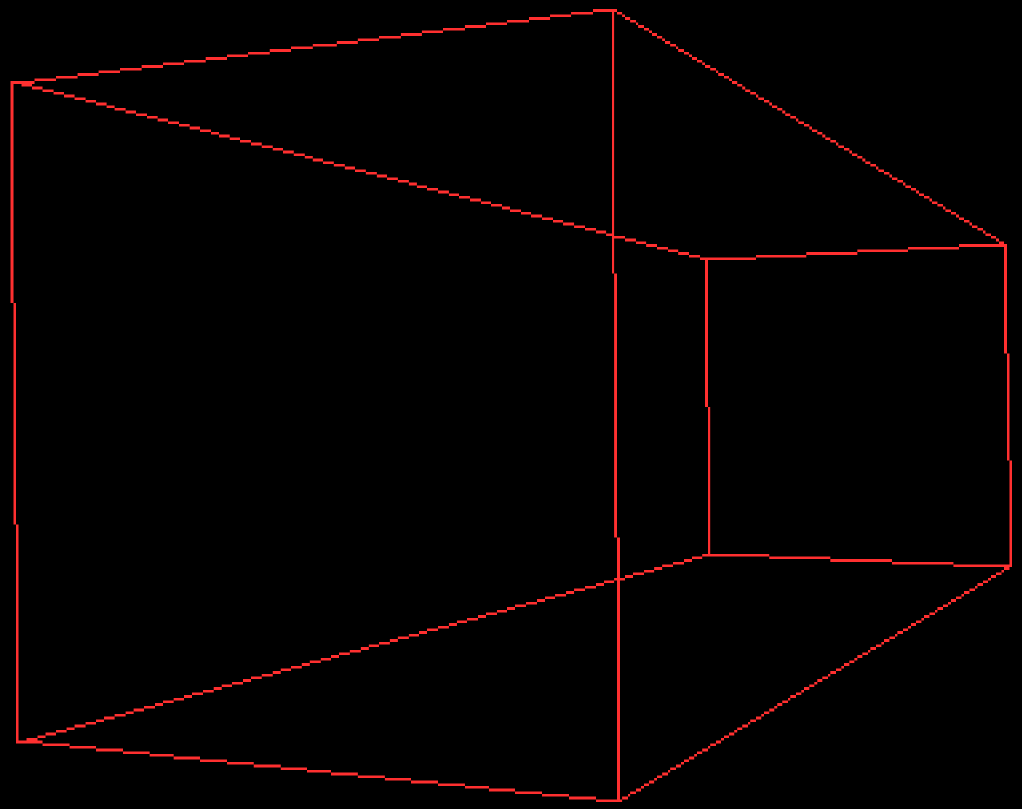


Objetos distantes aparecem menores, desvanecendo à distância

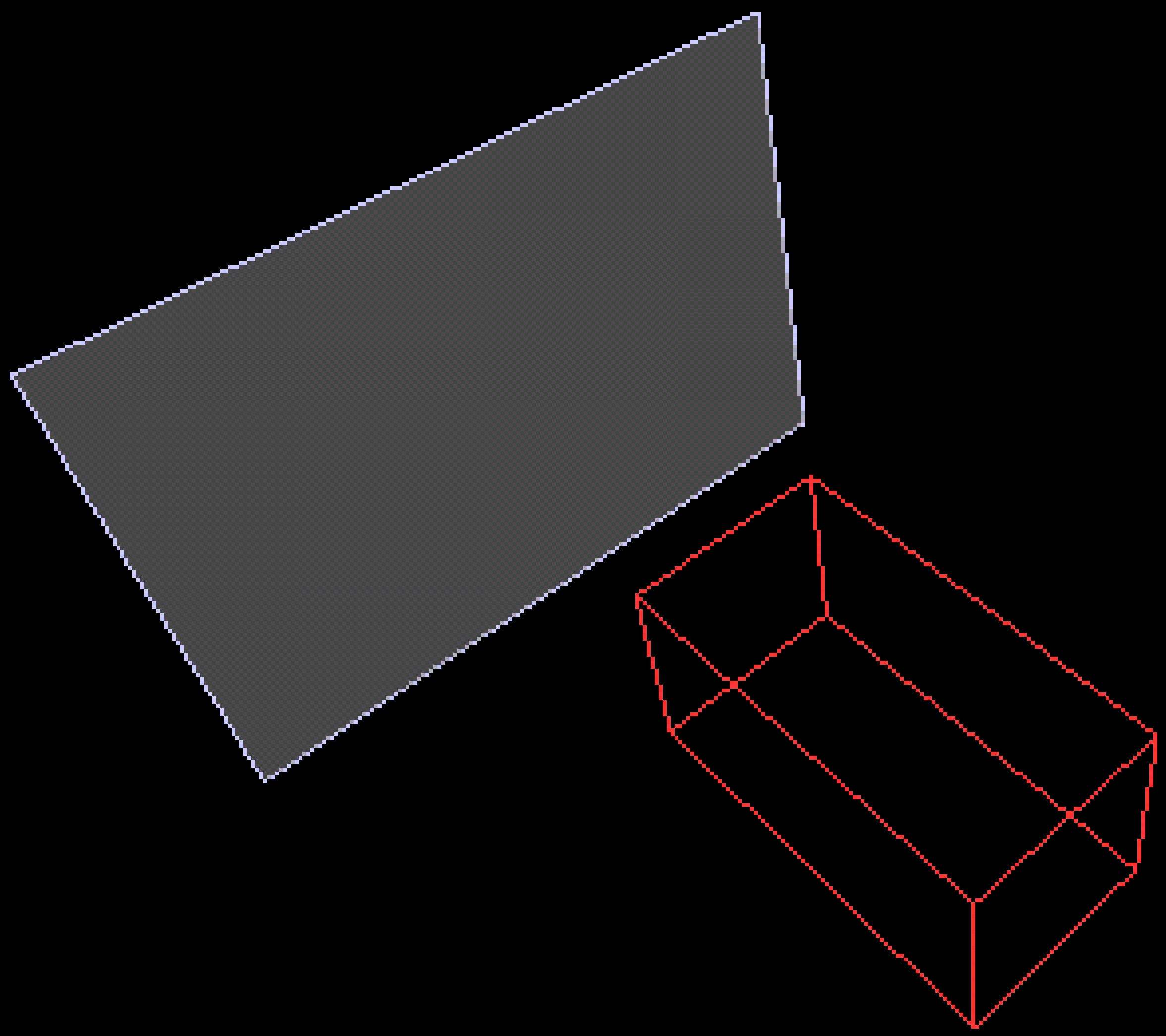
Projeção em Perspectiva (Impressão Visual)

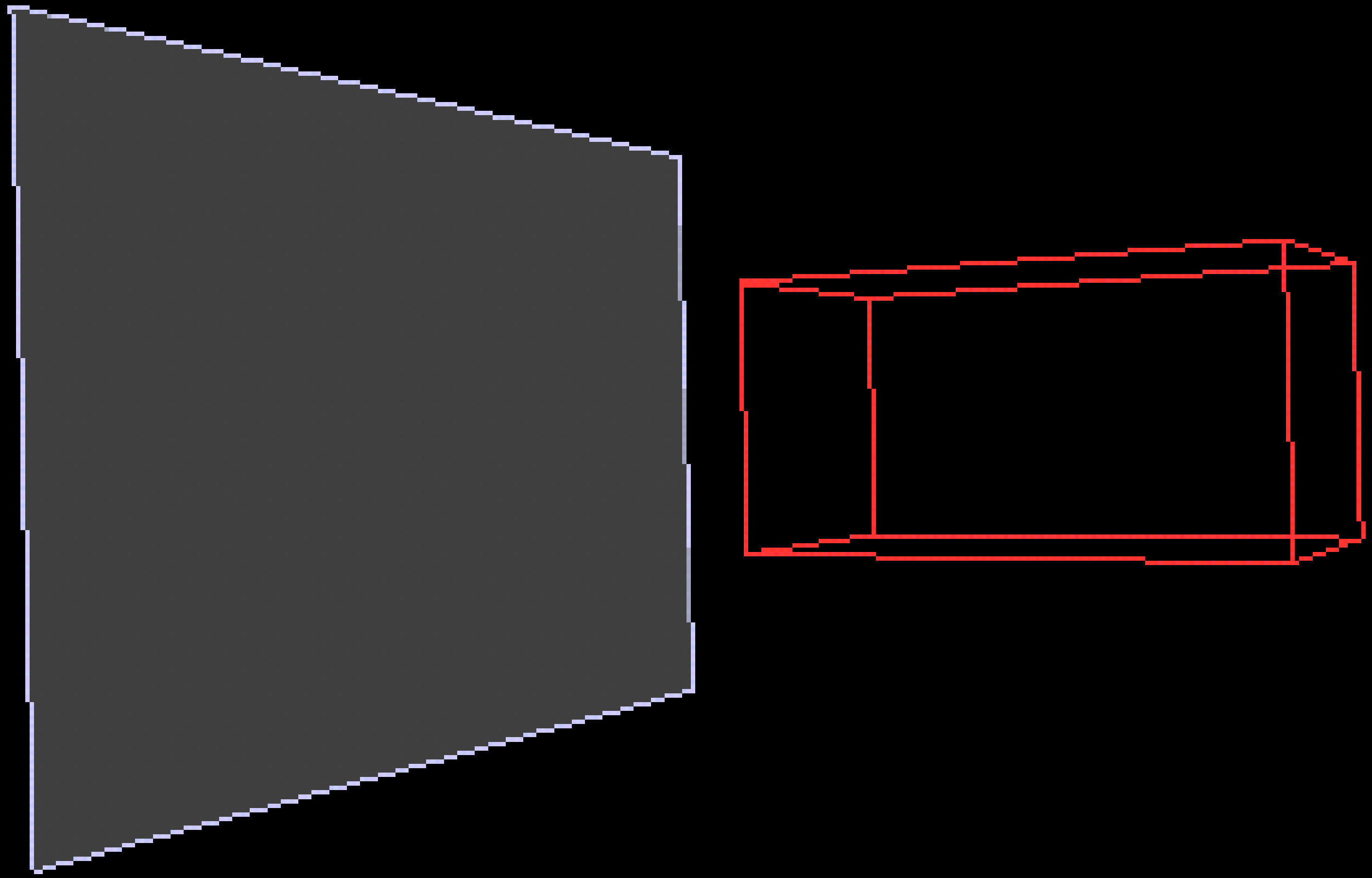


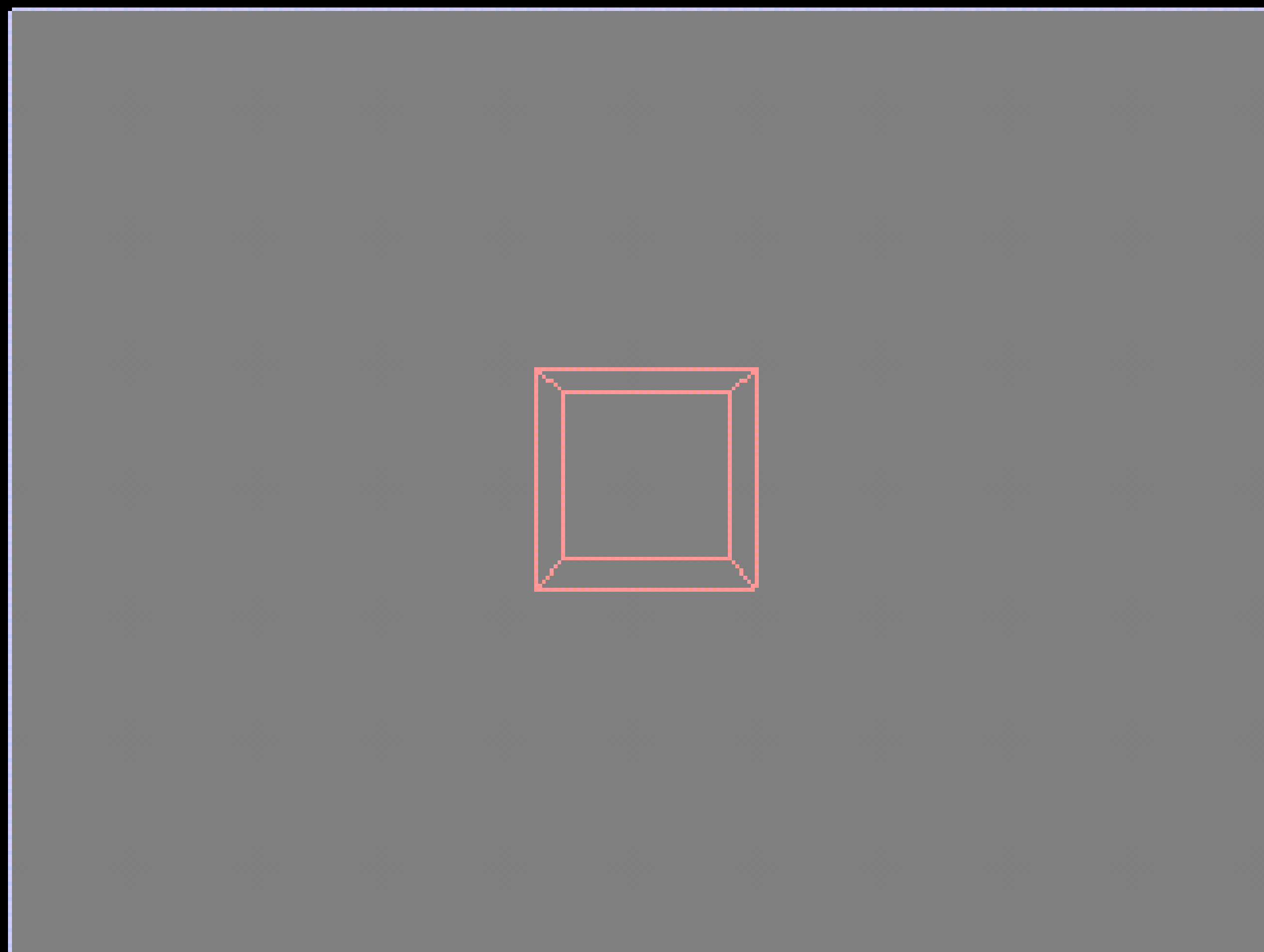
Projeção em Perspectiva (Impressão Visual)



Objetos distorcem-se quando vistos de forma oblíqua







Projeções Perspectivas

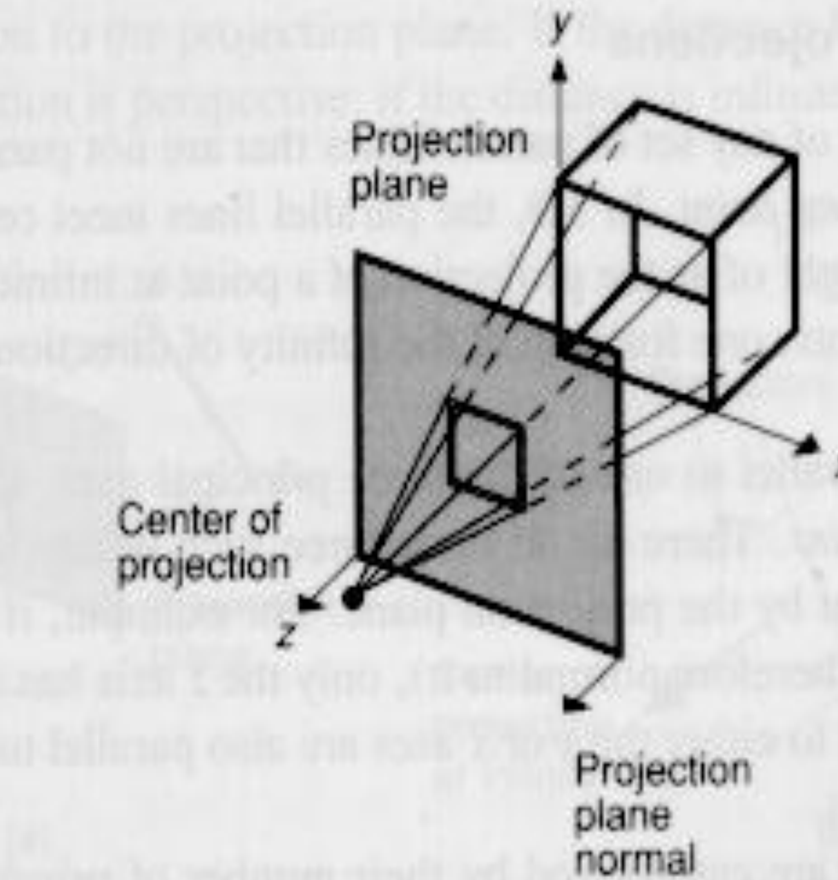


Fig. 6.4 Construction of one-point perspective projection of cube onto plane cutting the *z* axis. Projection-plane normal is parallel to *z* axis. (Adapted from [CARL78], Association for Computing Machinery, Inc.; used by permission.)

Projeções Perspectivas

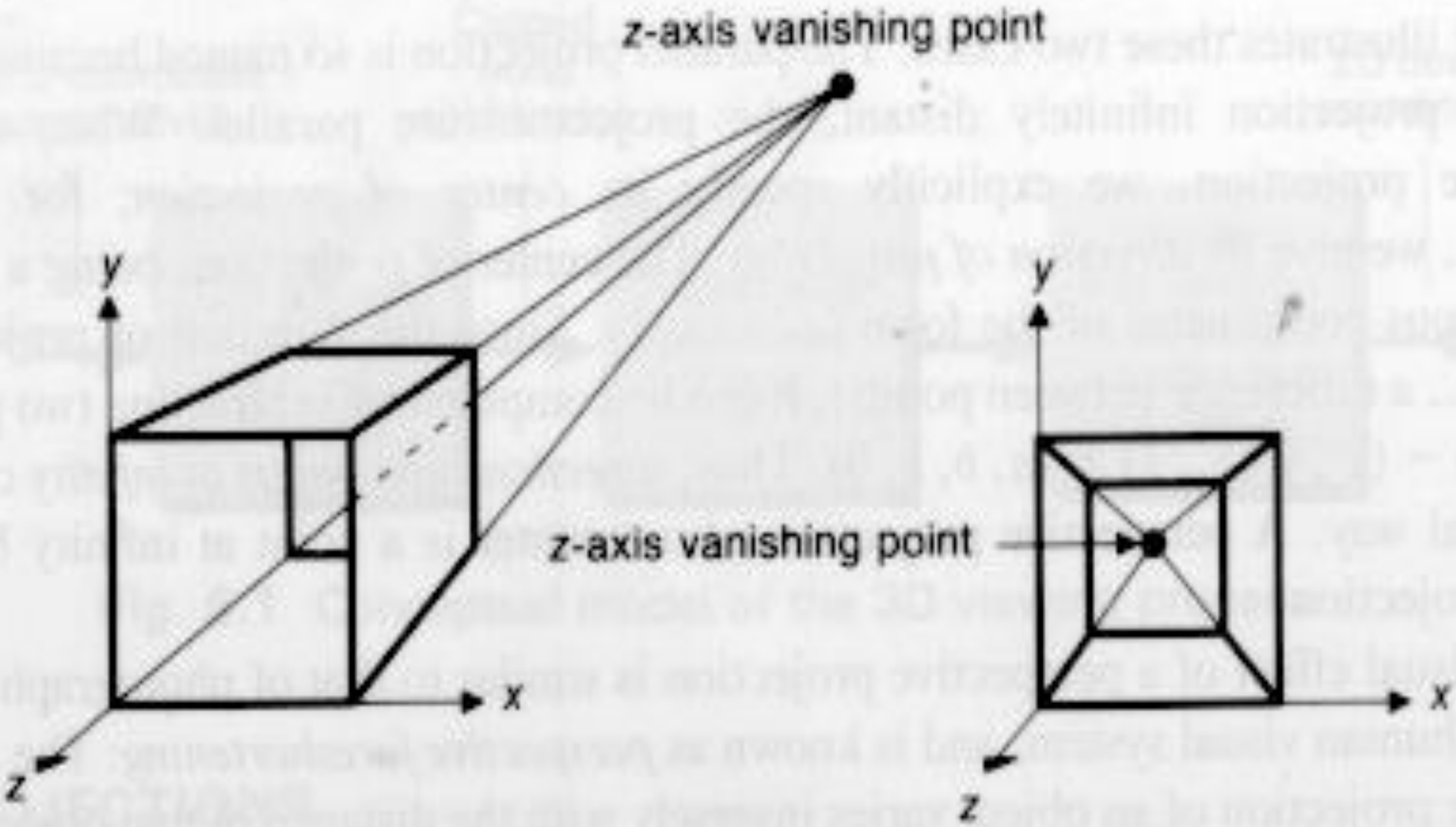


Fig. 6.3 One-point perspective projections of a cube onto a plane cutting the *z* axis, showing vanishing point of lines perpendicular to projection plane.

Projeções Perspectivas

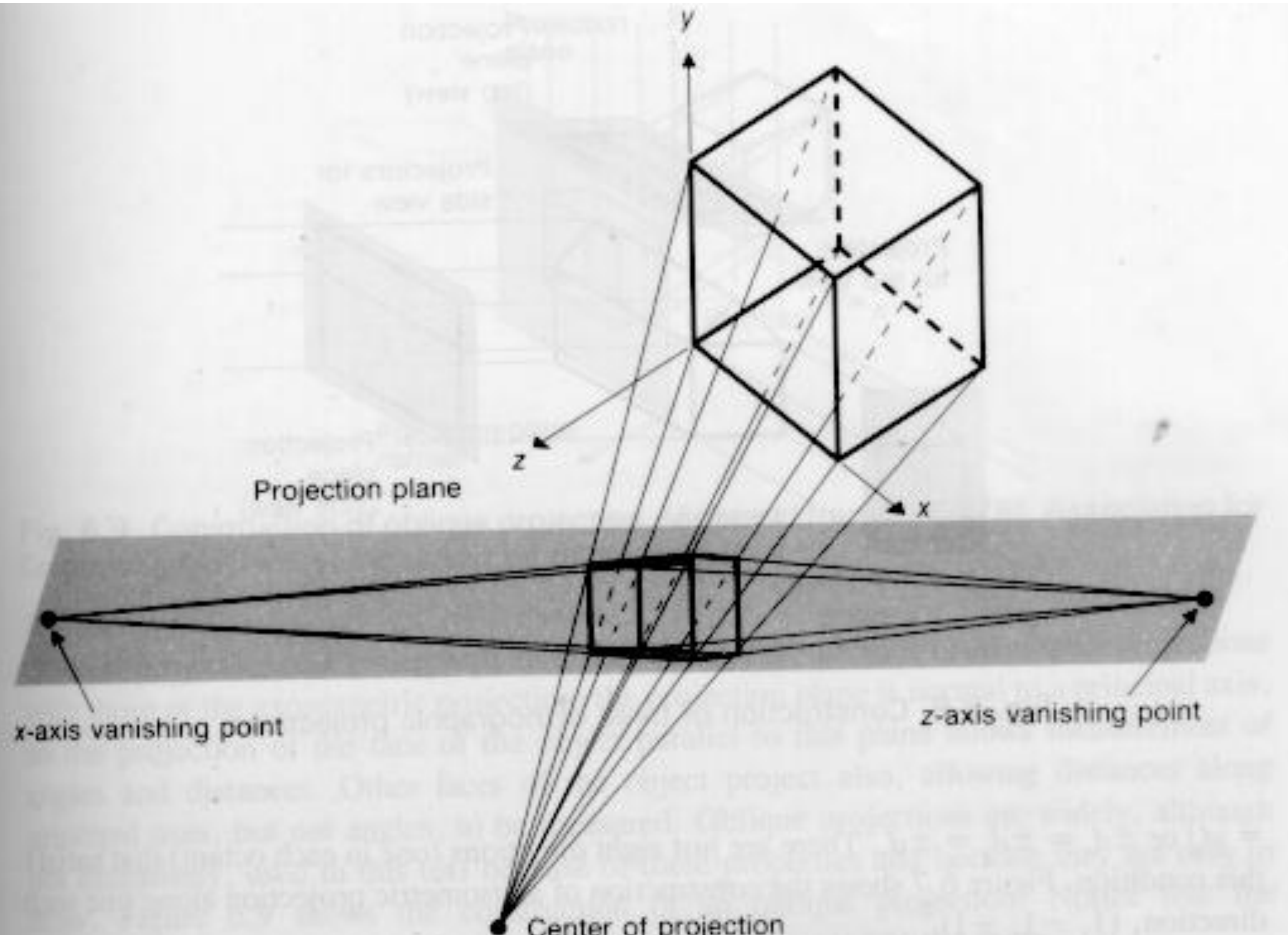


Fig. 6.5 Two-point perspective projection of a cube. The projection plane cuts the *x* and *z* axes.

Projeção Perspectiva

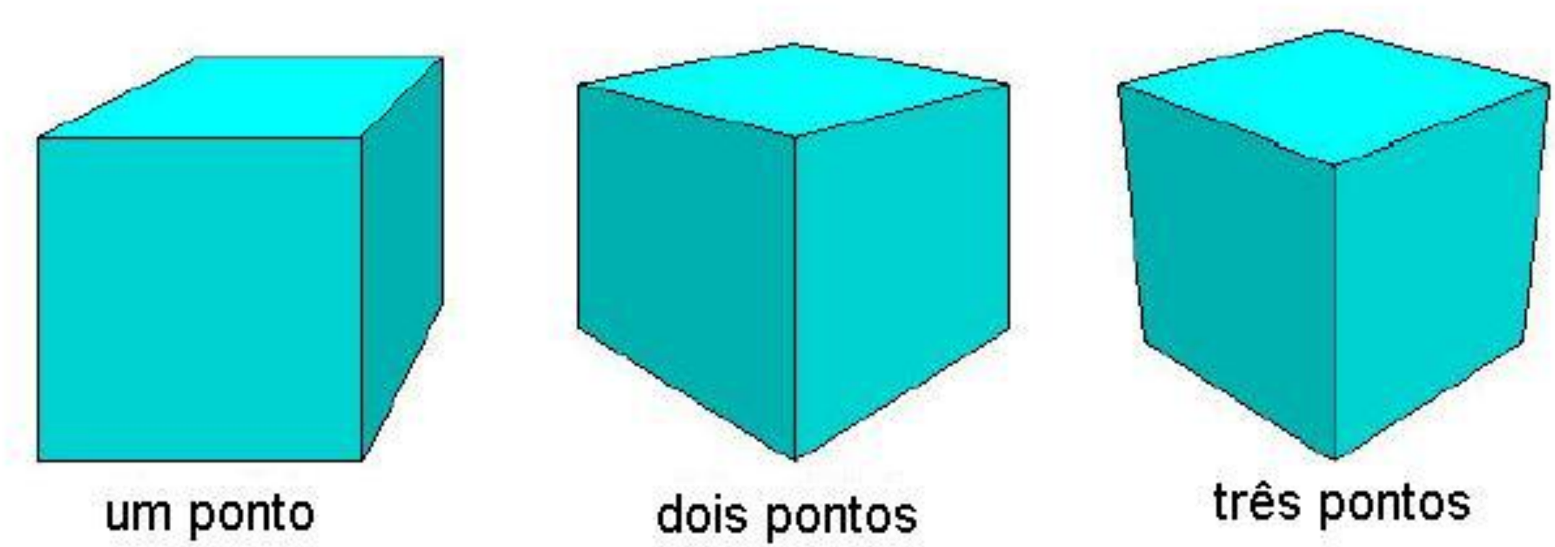
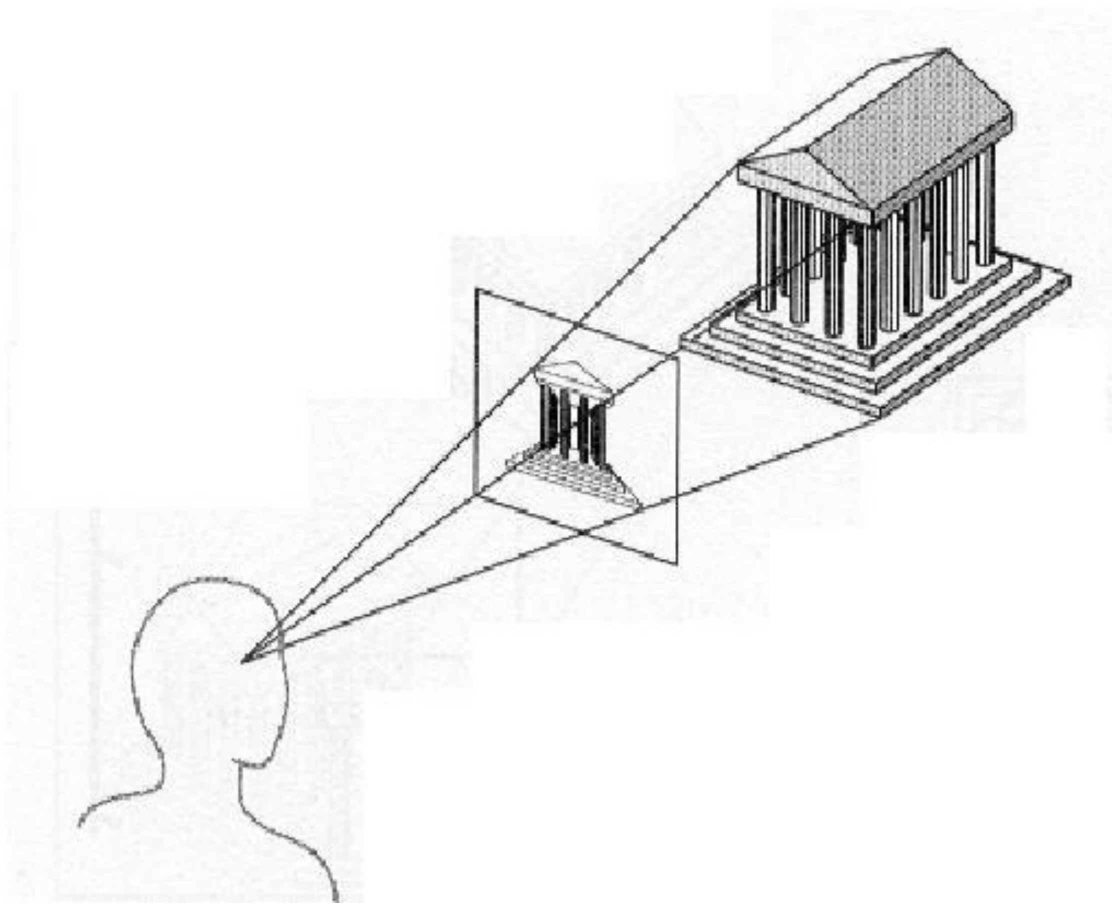


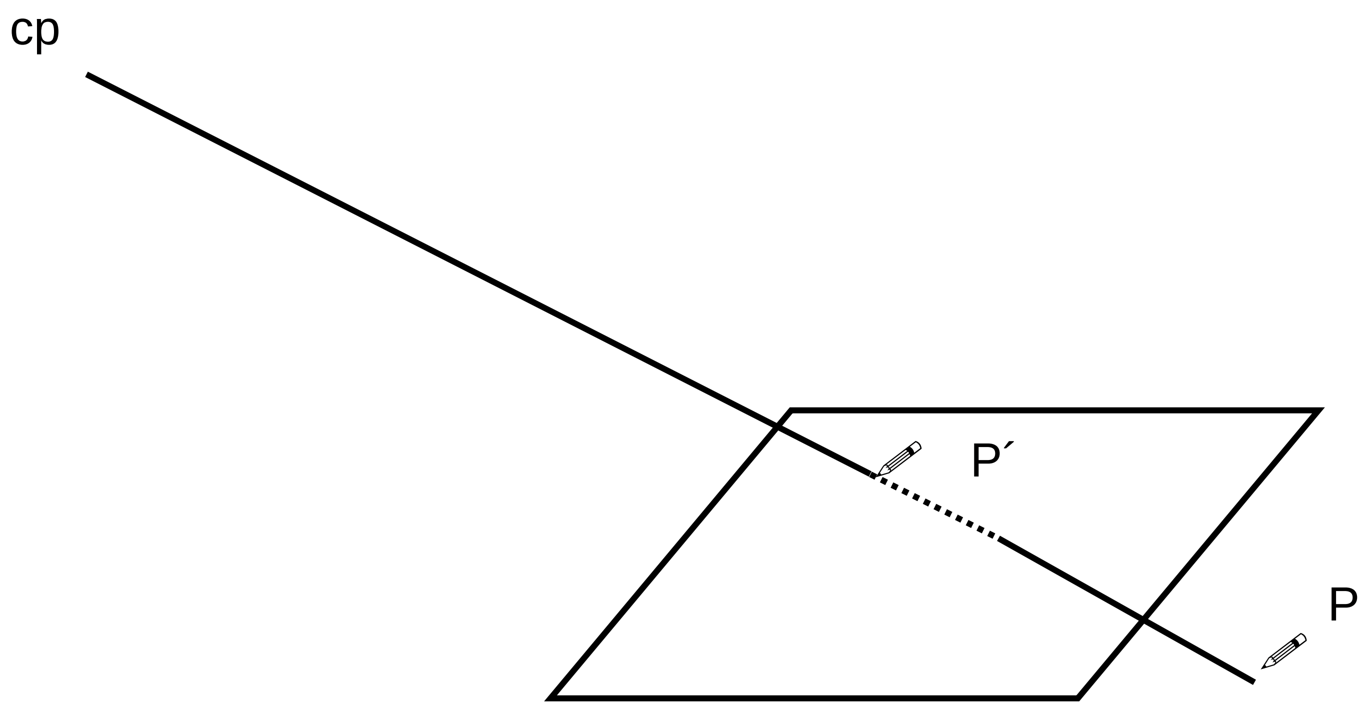
Figura: pontos de fuga possíveis

Projeção Perspectiva



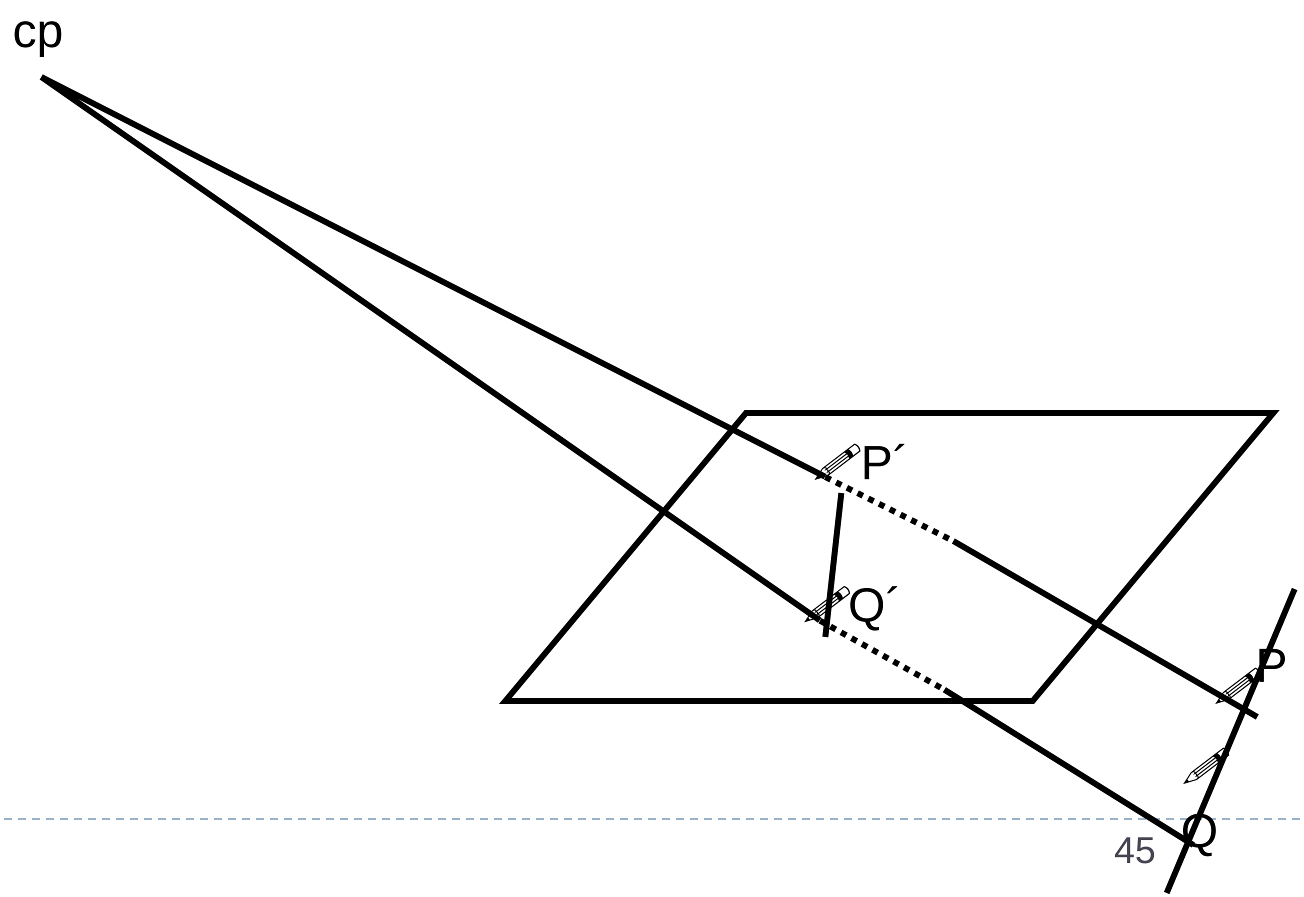
Projeções Perspectivas

- 1. Do ponto: ligar o ponto ao centro de projeção e obter a interseção da reta com o plano de projeção



Projeções Perspectivas

- 2. Da reta: ligar os dois pontos ao centro de projeção e obter a interseção das retas com o plano de projeção



Exemplos

***Figura**: Trinity with the Virgin, St. John and Donors*) feita em perspectiva por *Masaccio*, em 1427. Traçado com um ponto de fuga.

Exemplos

***Figura**: The Piazza of St. Mark, Venice*) feita por *Canaletto* em 1735-45 - perspectiva com um ponto de fuga.

Exemplos

Figura:*The Mansard Roof* - 1923 por Edward Hopper com dois pontos de fuga.

Exemplos

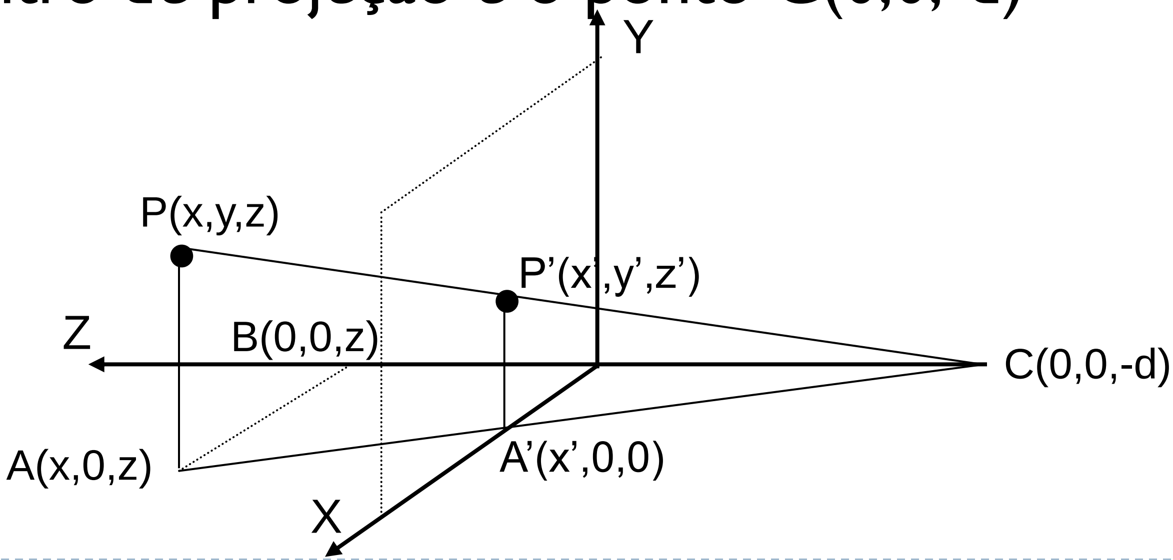
Figura: (*City Night*, 1926) por Georgia O'Keefe, com, aproximadamente, três pontos de fuga.

Anomalias da Perspectiva

- Encurtamento perspectivo: aumentando a distância do objeto ao centro de projeção: objeto parece ser menor;
- Pontos de fuga: as projeções são categorizadas pelo número de pontos de fuga principais (n° de eixos que o plano de projeção corta). Se a projeção é com 1 ponto de fuga principal então o plano de projeção corta o eixo z e linhas paralelas aos eixos x e y não convergem.

Projeção Perspectiva: Descrição Matemática

- Um ponto P(x,y,z) do objeto será transformado em um ponto P'(x',y',z') no plano de projeção
- Considere que o plano de projeção contém os eixos X e Y
- O centro de projeção é o ponto C(0,0,-d)



Projeção Perspectiva: Descrição Matemática

- Pode-se usar semelhança entre os triângulos ABC e A'OC. Assim,

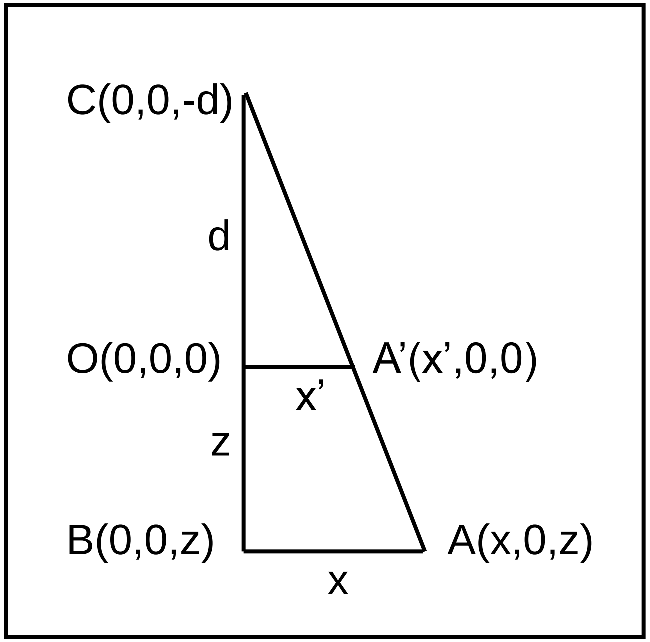
$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{z+d} \Rightarrow x' = \frac{x \cdot d}{z+d}$$

Analogamente,

$$\frac{y'}{d} = \frac{y}{z+d} \Rightarrow y' = \frac{y \cdot d}{z+d}$$

Finalmente,

$$z' = 0$$



Projeção Perspectiva: Descrição Matemática

- Problema: As equações para x',y' não são lineares, então como podemos representá-las na forma matricial?
- Solução: fazer w ≠ 1, em que w = z+d. Logo,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot d \\ y' &= y \cdot d \\ z' &= 0 \\ w' &= z + d \end{aligned}\right\}$$

equações lineares, possível de criar a fórmula matricial

Projeção Perspectiva: Descrição Matemática

- Matriz em Perspectiva

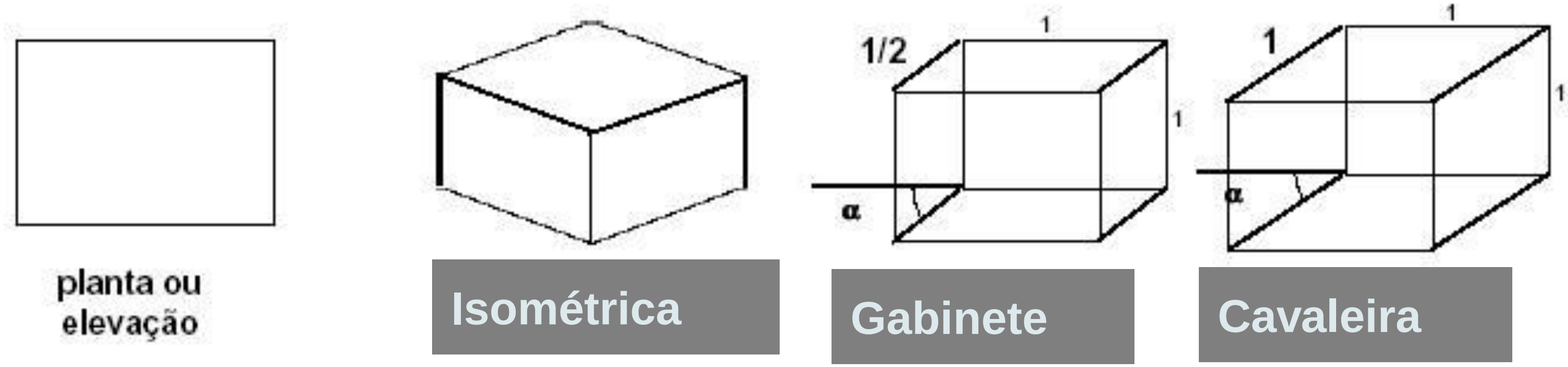
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ 0 \\ z + d \end{bmatrix}$$

  - Em coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x \cdot d}{z + d} & \dfrac{y \cdot d}{z + d} & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Comparações - projeções de um cubo

- Paralelas



- Cônicas