

Árvores B⁺



Prof Márcio Bueno

ed2tarde@marciobueno.com / ed2noite@marciobueno.com

Material da Prof^a Ana Eliza Lopes Moura

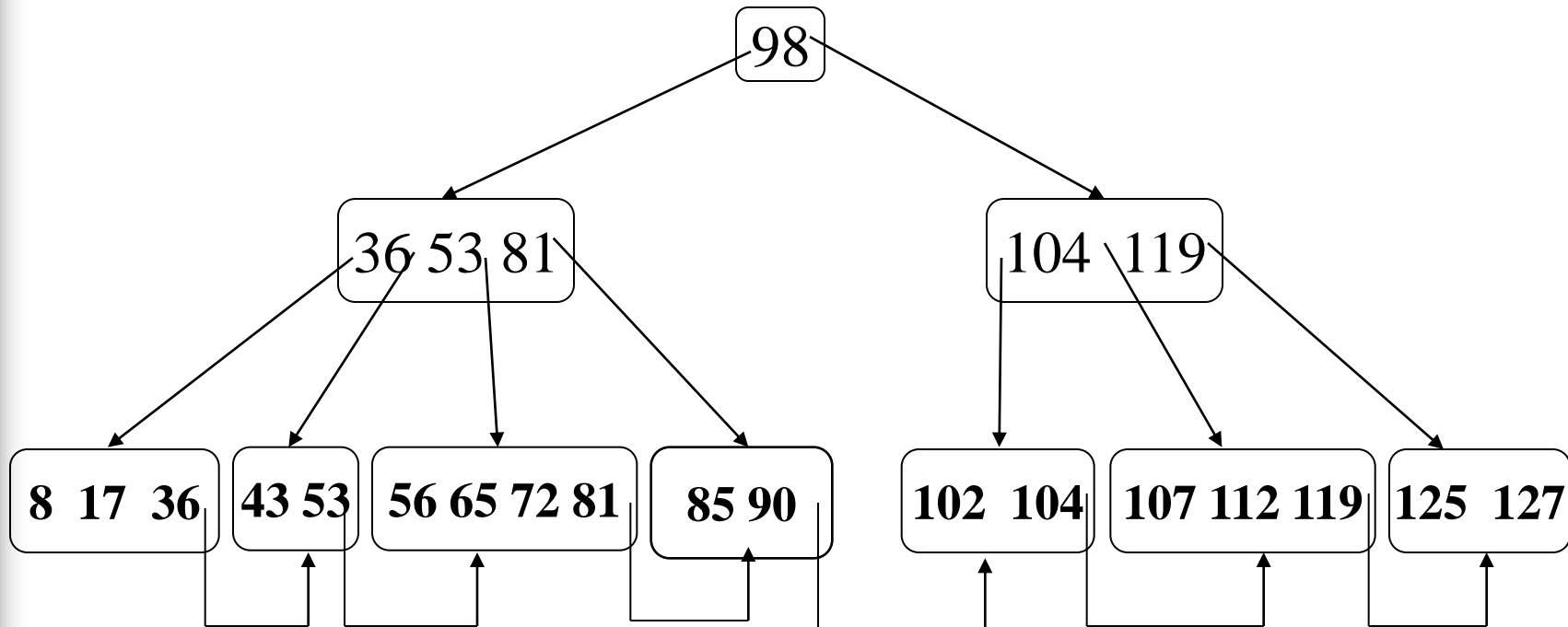


Árvore B⁺

- A árvore B⁺ é uma variação da estrutura básica da árvore B.
- Características:
 - Todas as chaves são mantidas em folhas;
 - As chaves são repetidas em nós não-folha formando um índice;
 - As folhas são ligadas oferecendo um caminho seqüencial para percorrer as chaves.

Árvore B⁺

■ Exemplo





Árvore B⁺

■ Vantagem

- Mantém a eficiência da busca e da inserção da árvore B;
- Aumenta a eficiência da localização do próximo registro na árvore de **$O(\log_2 N)$** para **$O(1)$** ;
- Não é necessário manter nenhum ponteiro de registro em nós não-folha.



Árvore B⁺

■ Utilização

- Muitos Bancos de Dados são construídos usando o mecanismo de Árvores B⁺: *SQLServer* e *Oracle*;



Árvore B+

■ Inserção

- A inserção de uma nova chave em uma árvore B+ é semelhante a inserção em uma árvore B: ocorre sempre em um nó folha.
- Passos:
 - Localizar a folha dentro da qual a chave deve ser inserida;
 - Localizar a posição de inserção dentro da folha;
 - Inserir a chave;
 - Se, após a inserção, a folha estiver completa, realizar a **cisão da página**.

Árvore B+

■ Inserção (Exemplo) – ordem $M = 5$

- Inserir chave 85

85			
----	--	--	--
- Inserir chave 60

60		85		
----	--	----	--	--
- Inserir chave 52

52		60		85	
----	--	----	--	----	--
- Inserir chave 70 \leftarrow ***Realizar cisão***



Árvore B+

■ Inserção -> Cisão de Página

– As **M-1** chaves serão divididas em dois grupos:

- as **(M-1 div 2)** chaves menores ficam na folha esquerda;
- as **(M-1 div 2)** chaves maiores ficam na folha direita;
- A maior chave da esquerda é copiada para o nó pai.

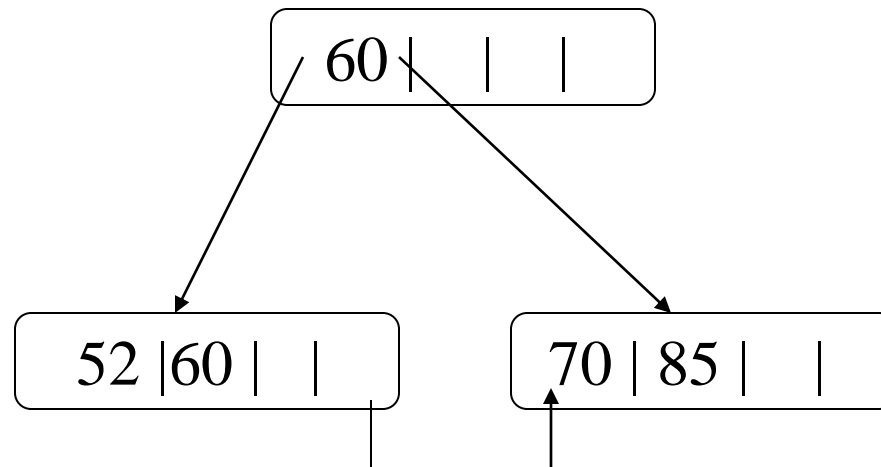
Árvore B+

■ Inserção (Exemplo - cont.)

– Inserir chave 70 (antes)

52 | 60 | 85 |

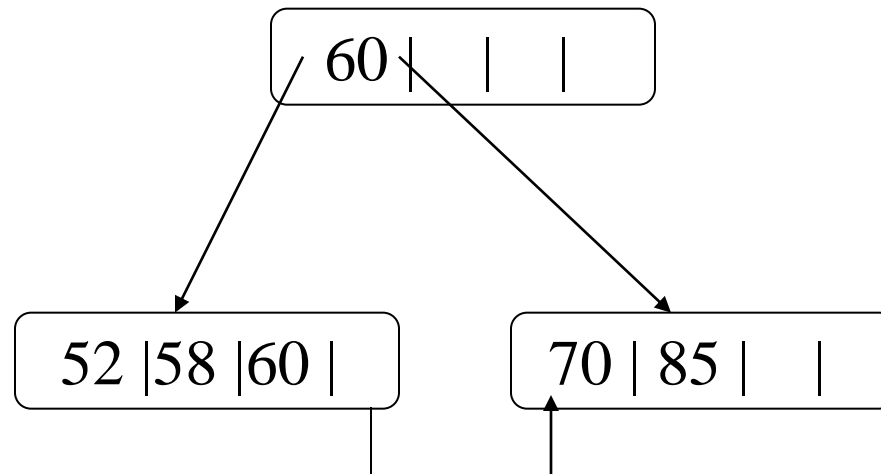
– Inserir chave 70 (depois)



Árvore B+

- Inserção (Exemplo - cont.)

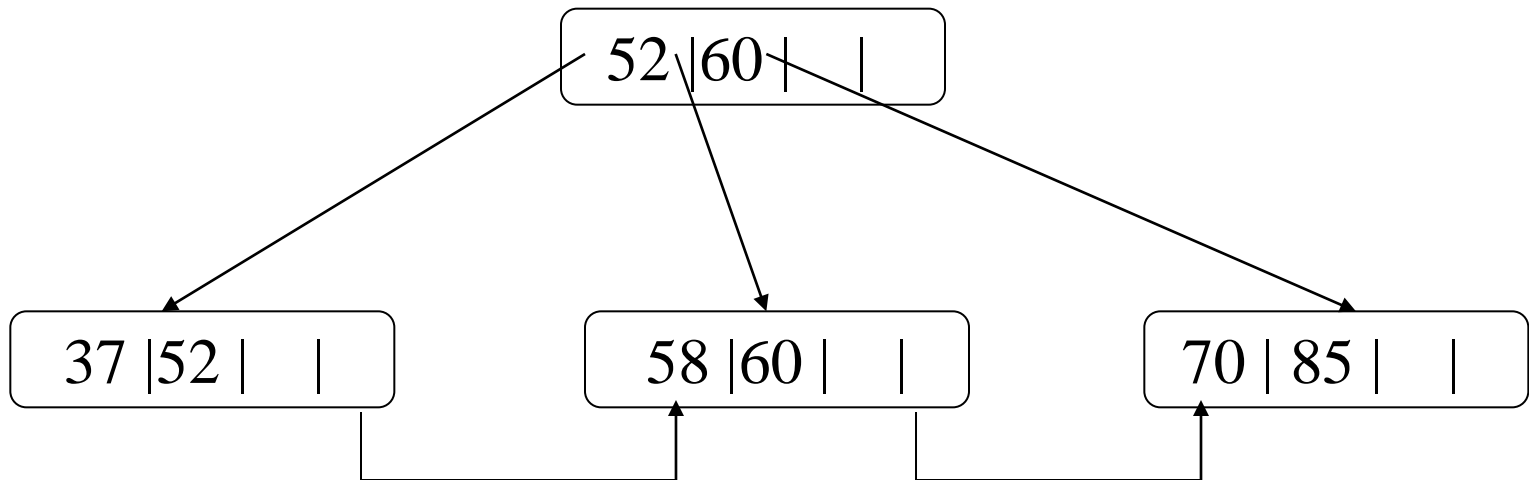
- Inserir chave 58



- Inserir chave 37 ⇐ **Realizar cisão**

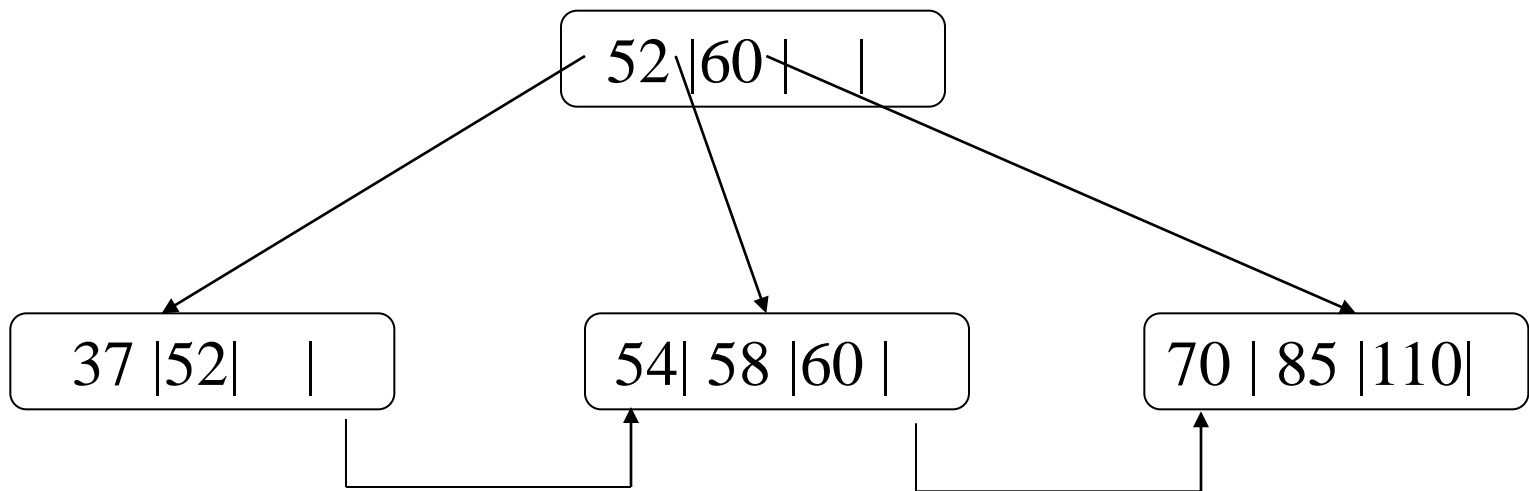
Árvore B+

- Inserção (Exemplo - cont.)
 - Inserir chave 37 (depois)



Árvore B+

- Inserção (Exemplo - cont.)
 - Inserir chaves 54, 110

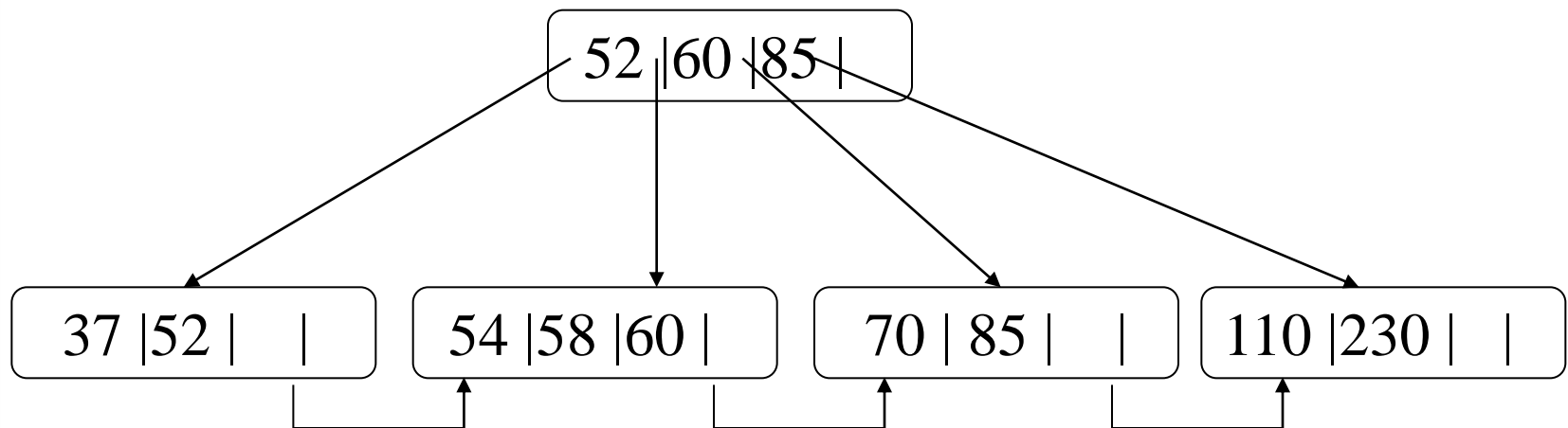


- Inserir chave 230 ⇐ **Realizar cisão**

Árvore B+

- Inserção (Exemplo - cont.)

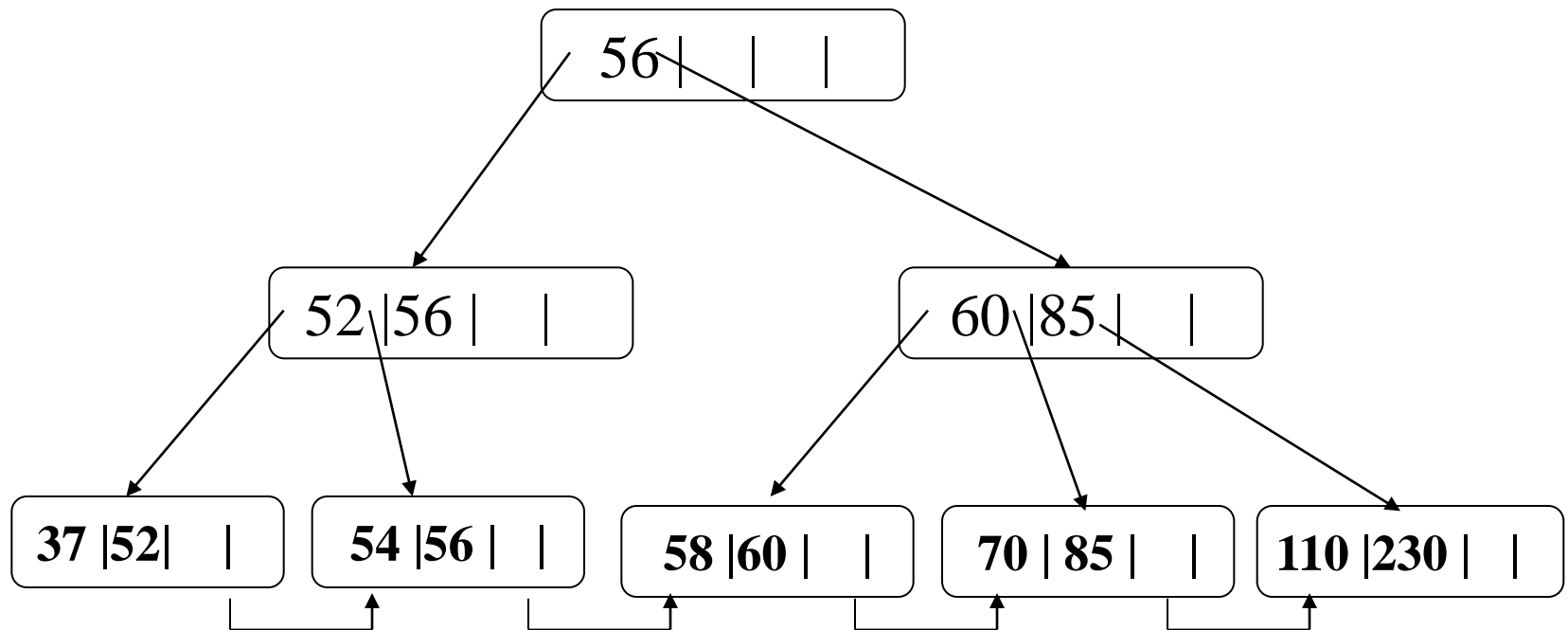
- Inserir chave 230 (depois)



- Inserir chave 56 ⇐ **Realizar cisão**

Árvore B+

- Inserção (Exemplo - cont.)
 - Inserir chave 56 (depois)





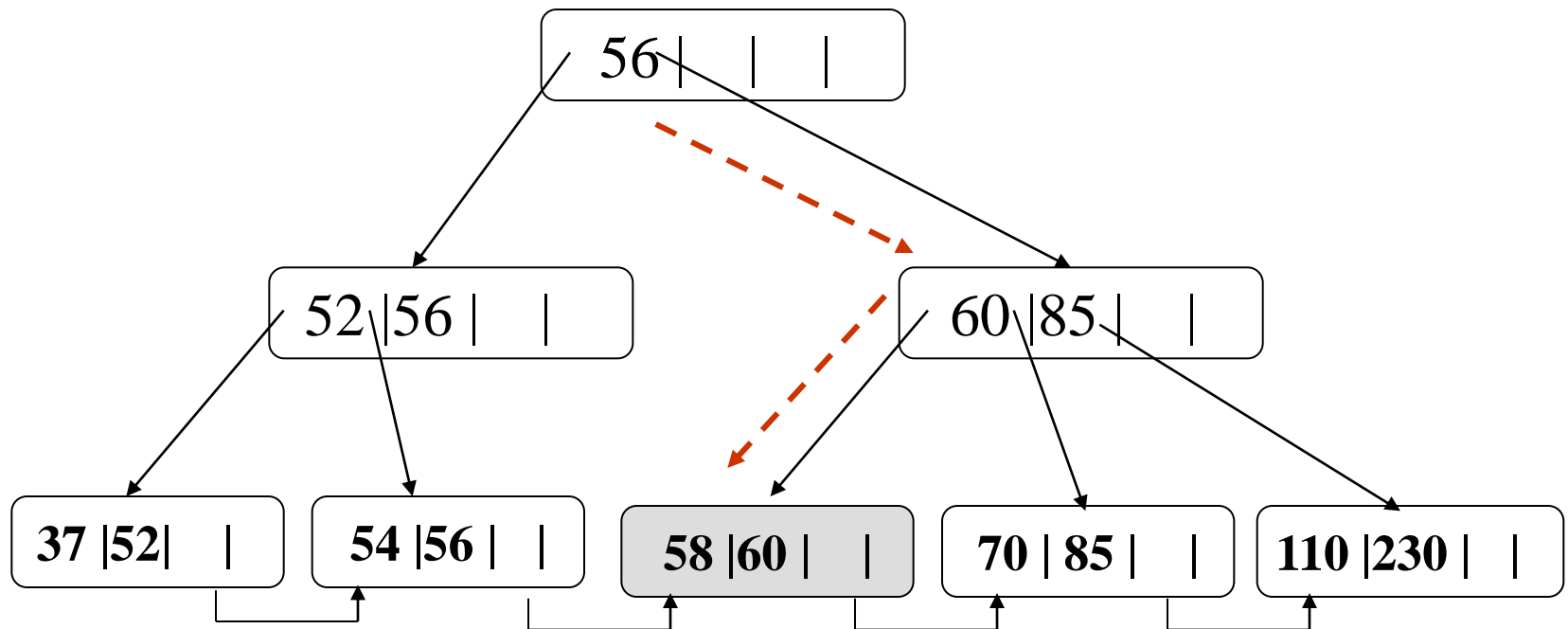
Árvore B+

■ Pesquisa

- Semelhante à pesquisa em árvore B;
- A pesquisa sempre leva a uma página folha;
- A pesquisa não pára se a chave procurada for encontrada em uma página índice.

Árvore B+

- Pesquisa (Exemplo)
 - Procurar chave 60



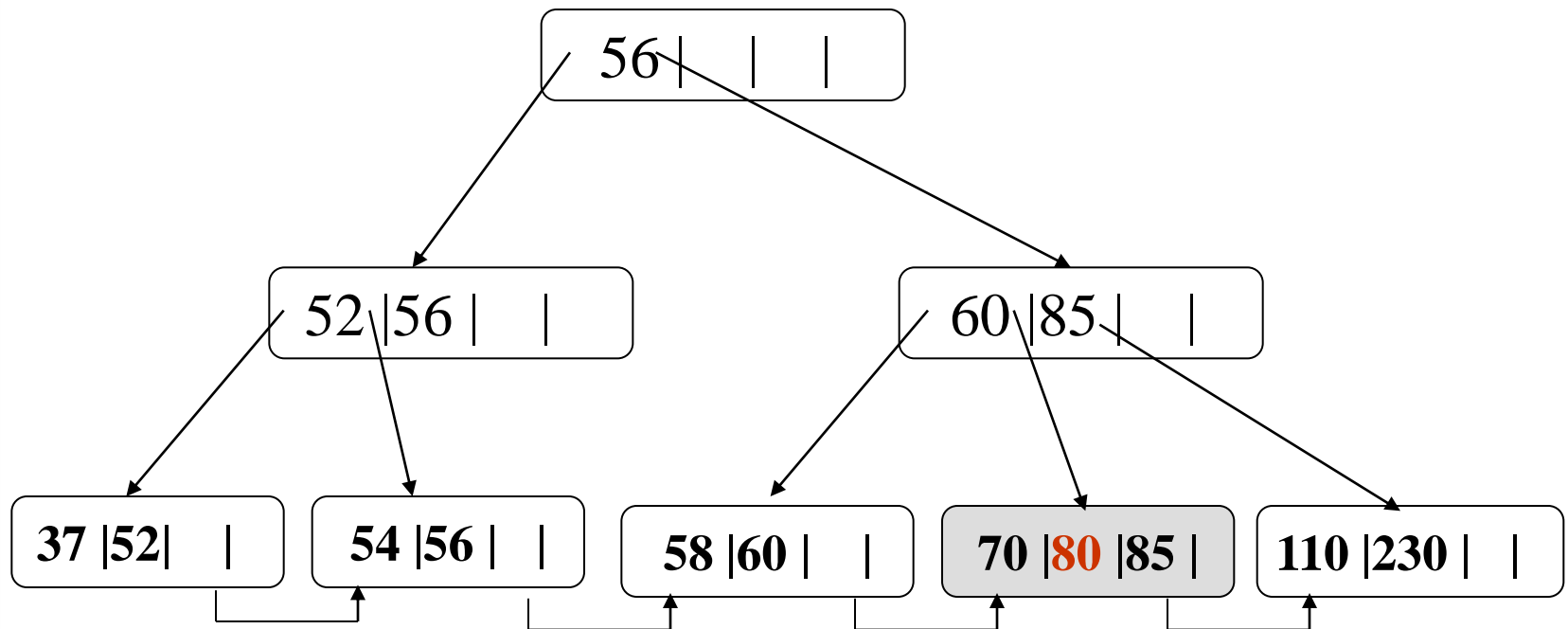


Árvore B+

- Remoção de uma chave X
 - **Caso 1**: A chave X aparece apenas em um nó folha
 - A chave X é simplesmente removida e a folha é reorganizada;

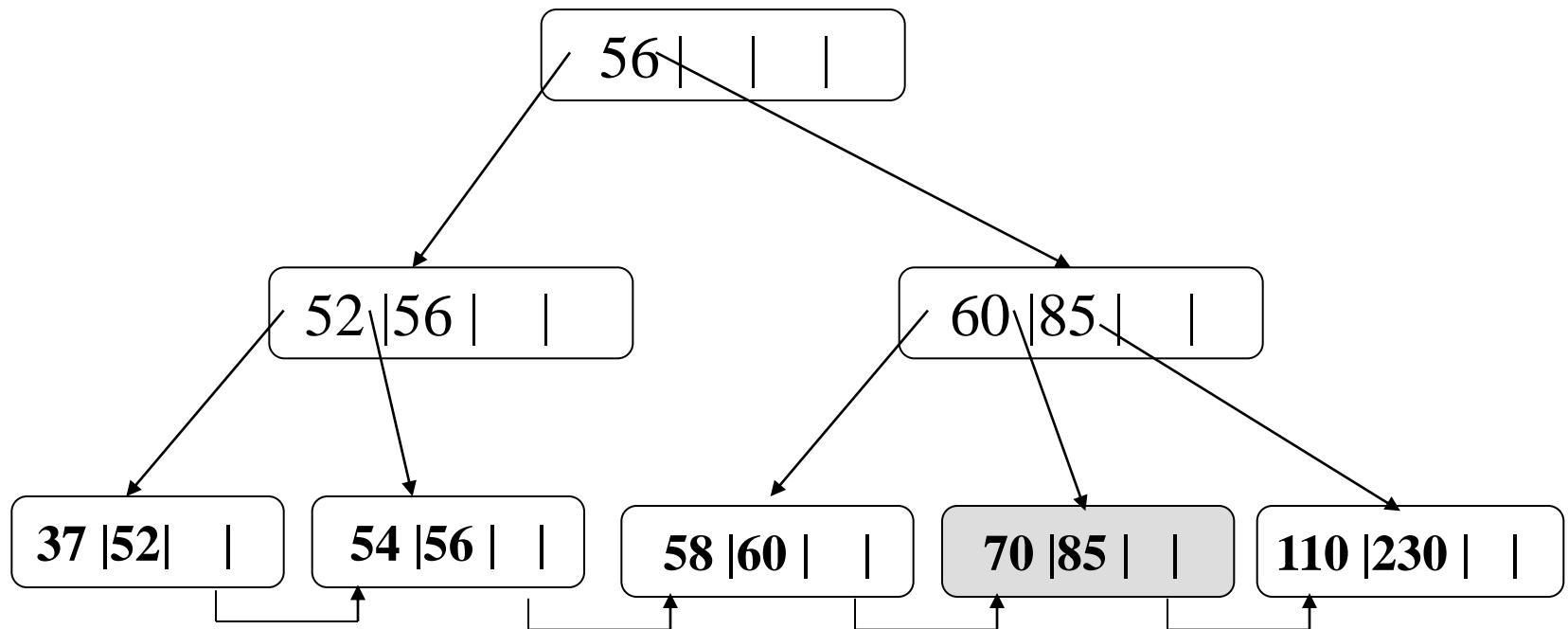
Árvore B+

- Remover a chave 80 (antes)



Árvore B+

- Remover a chave 80 (depois)



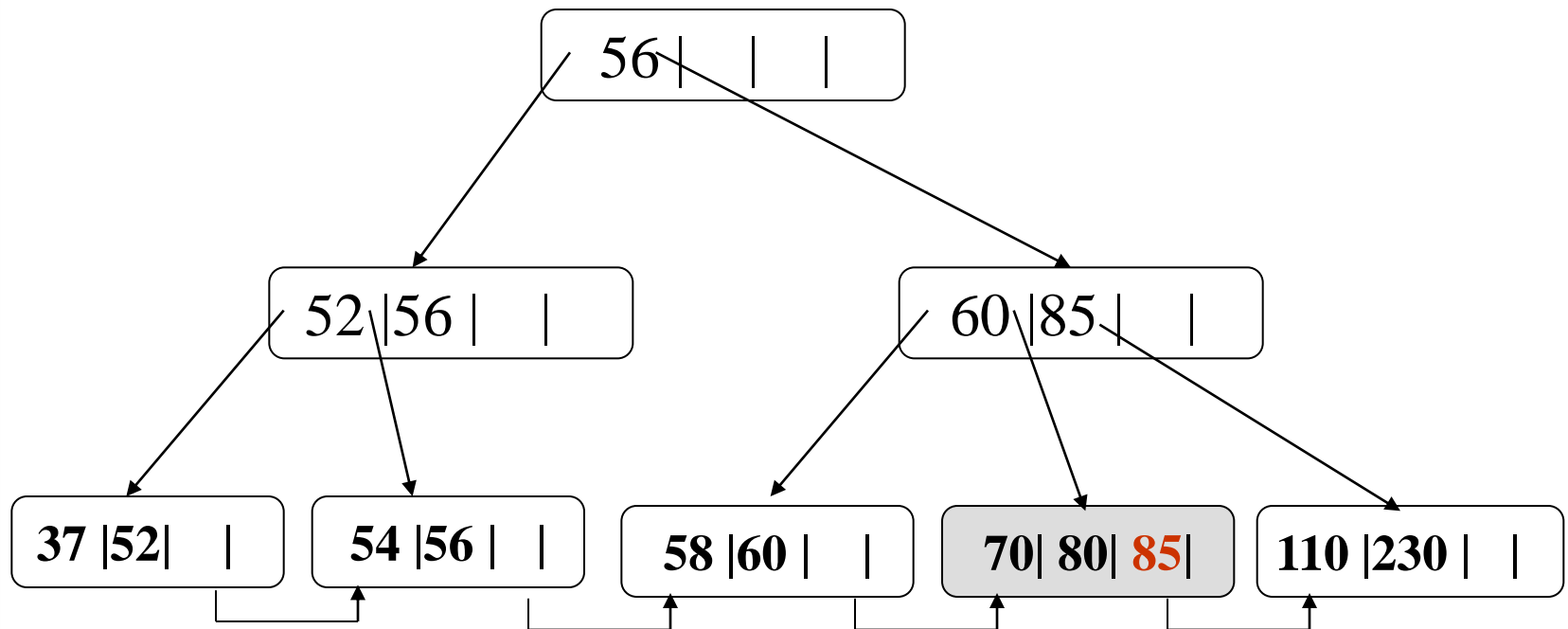


Árvore B+

- Remoção de uma chave X (cont.)
 - **Caso 2**: A chave X aparece também em nós internos (índice)
 - A chave X é removida;
 - A folha é reorganizada;
 - A chave X **não** é removida dos nós internos.

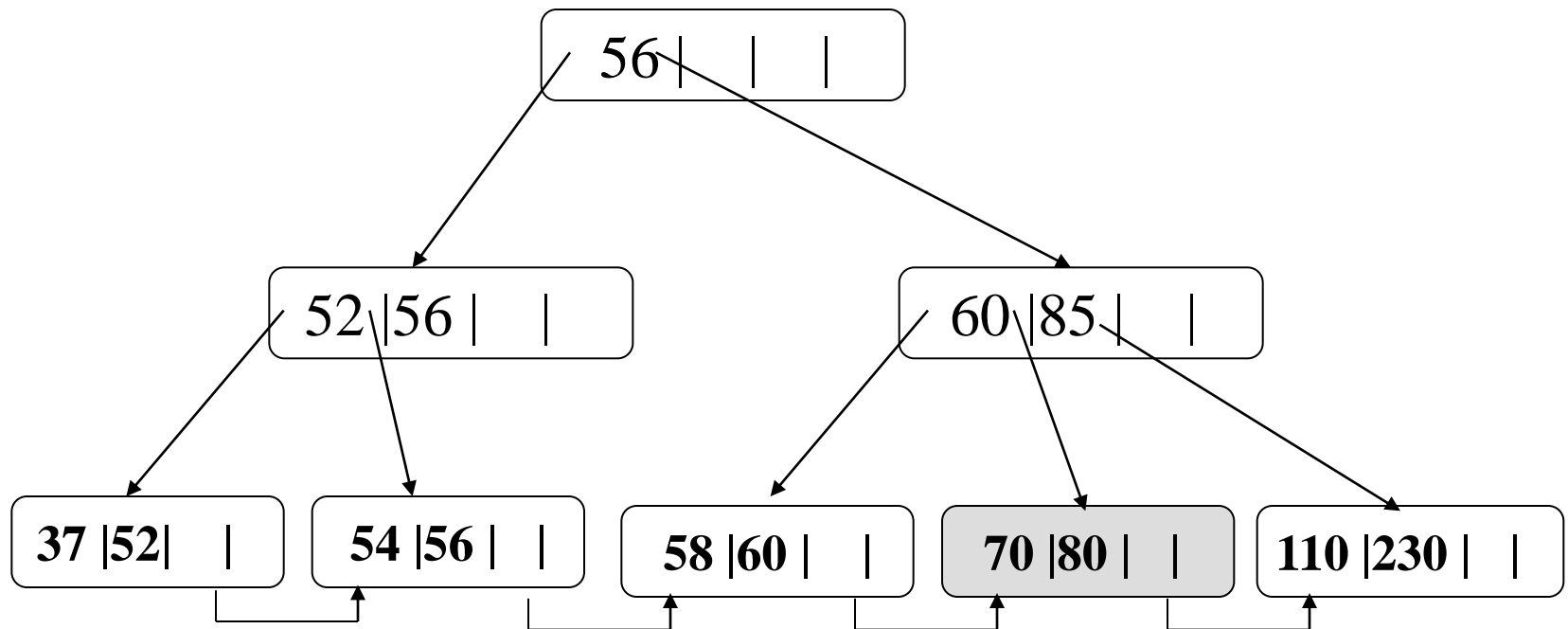
Árvore B+

- Remover a chave 85 (antes)



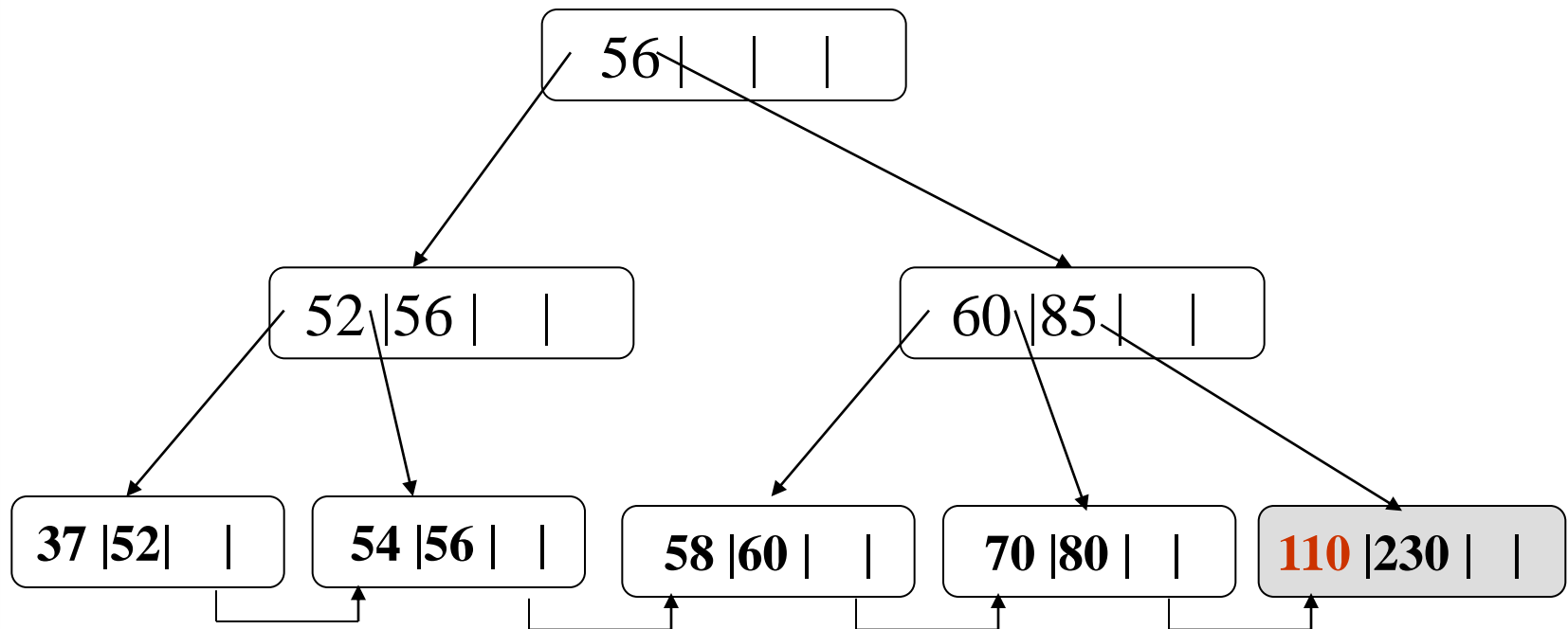
Árvore B+

- Remover a chave 85 (depois)



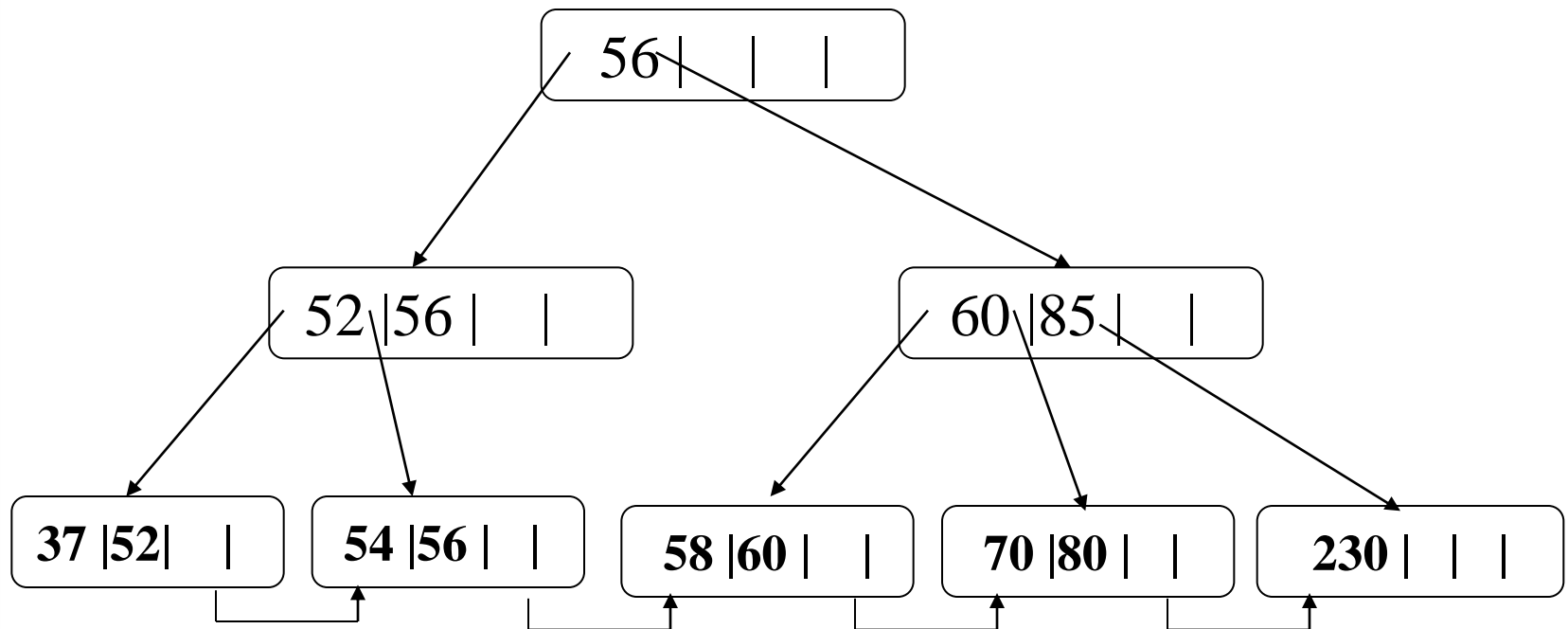
Árvore B+

- Remover a chave 110 (antes)



Árvore B+

- Remover a chave 110 (depois)





Árvore B+

■ Remoção

- Quando uma chave é retirada de um nó folha, o número de chaves restantes pode ser menor que $(M-1)/2$.
- Tratamentos:
 - **Concatenação**
 - **Redistribuição**



Árvore B+

■ Remoção com Concatenação

- Duas páginas **P** e **Q** são chamadas **irmãos adjacentes** se têm o mesmo pai **W** e são apontadas por ponteiros adjacentes em **W**.
- **P** e **Q** podem ser concatenadas se são irmãos adjacentes e juntas possuem menos de **M-1** chaves.



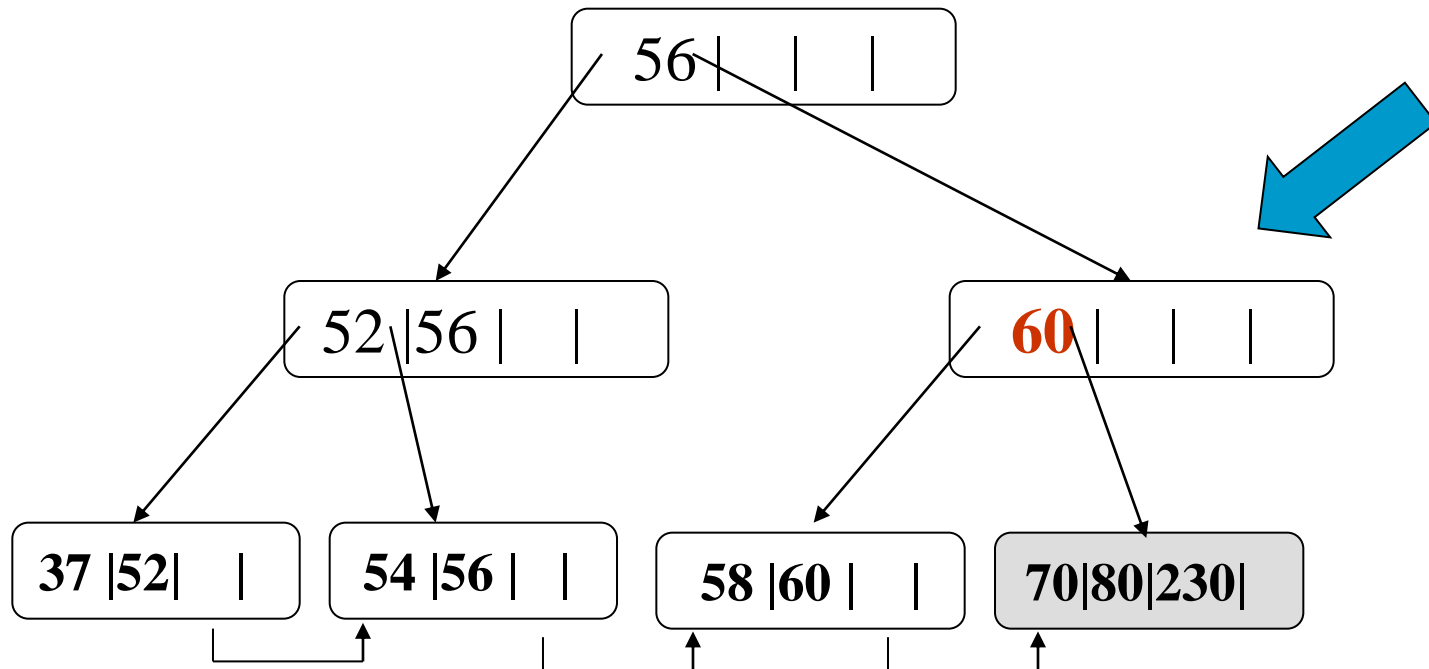
Árvore B+

■ Remoção com Concatenação

- A concatenação agrupa as entradas de duas páginas em uma só;
- No nó pai deixa de existir uma entrada: aquela da chave que se encontra entre os ponteiros para **P** e **Q**.
- Essa chave é simplesmente removida do nó pai.

Árvore B+

- Remoção com Concatenação
 - Remover a chave 110 (cont.)



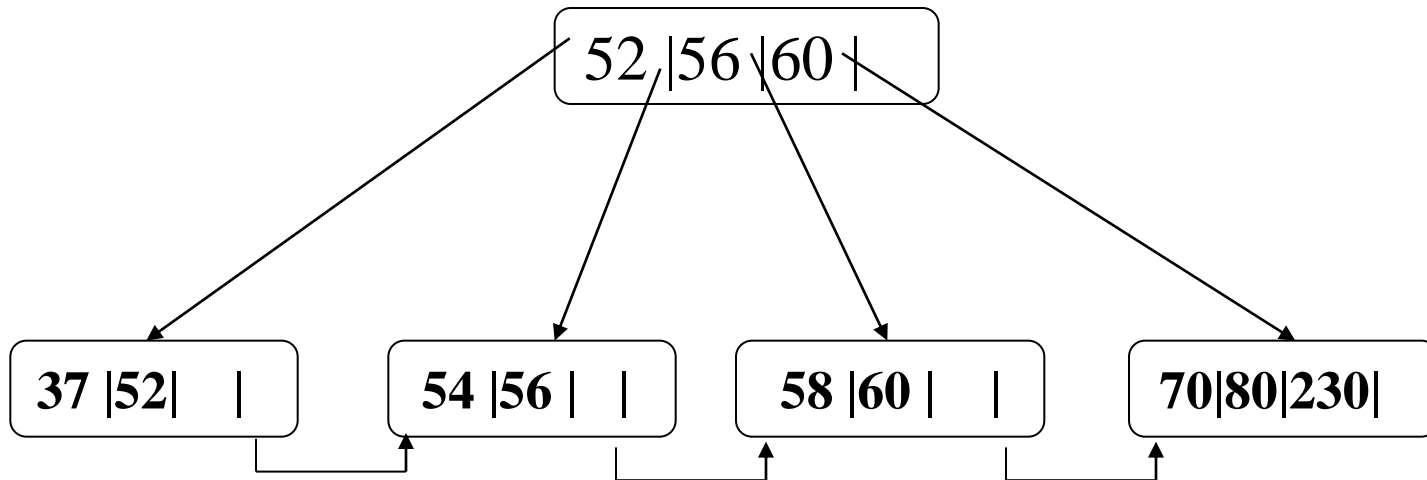


Árvore B+

- Remoção com Concatenação
 - Como foi retirada uma chave do nó **W**, caso ele passe a ter menos de $(M-1)/2$ chaves, o processo se repete;
 - Ou seja, a concatenação é um processo propagável;
 - Se a propagação atingir a raiz, a árvore diminuirá de altura.

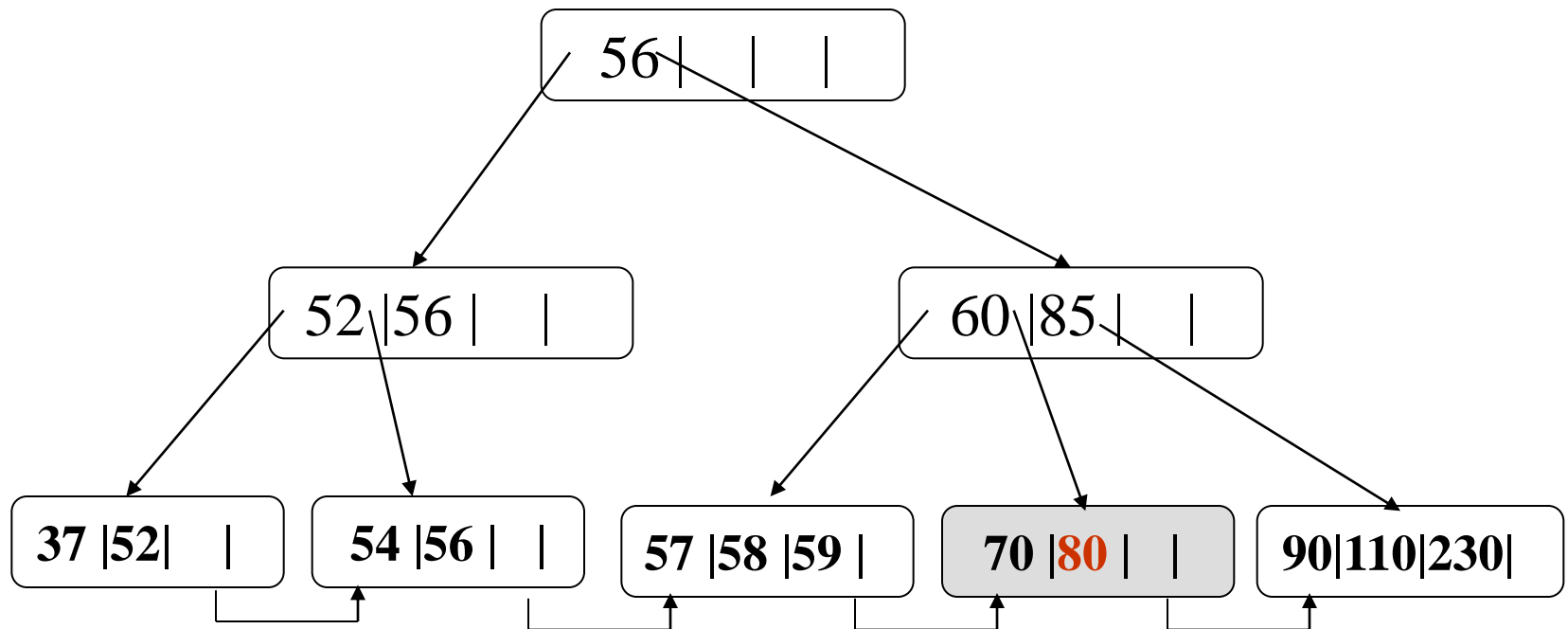
Árvore B+

- Remoção com Concatenação
 - Remover a chave 110 (propagação)



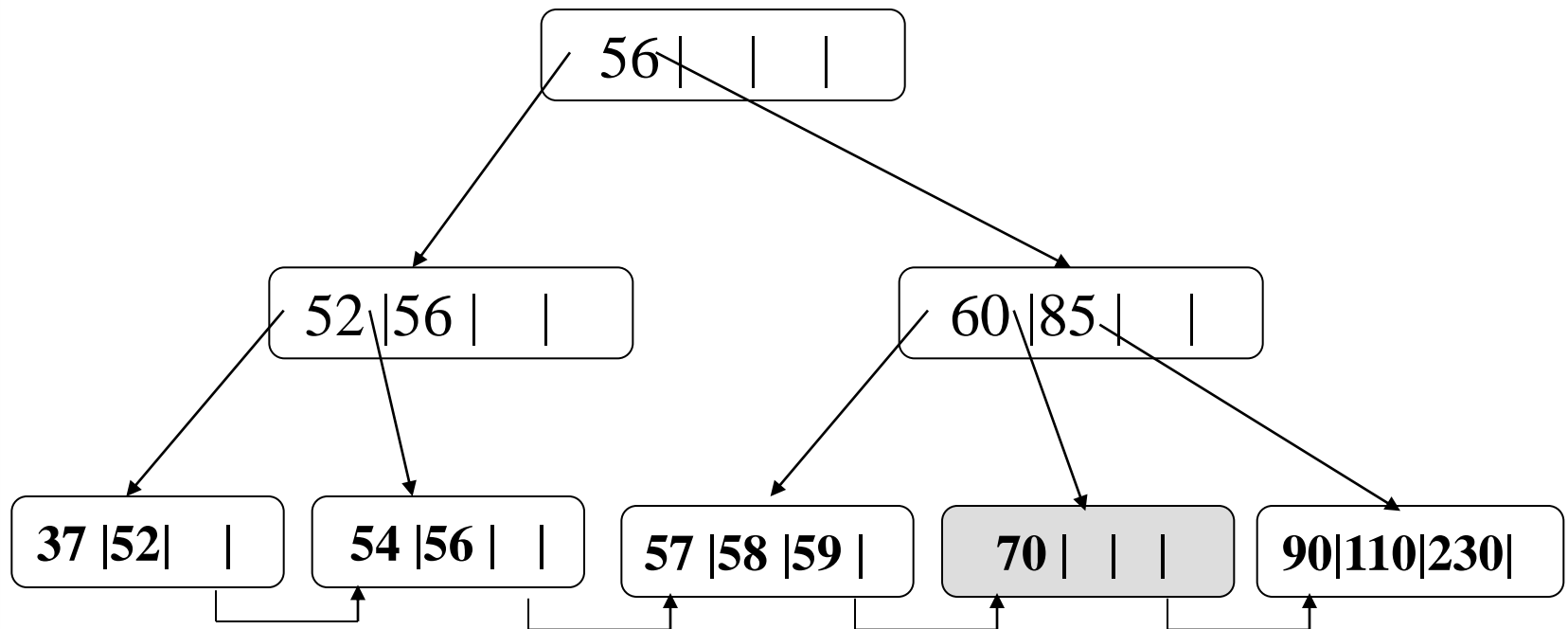
Árvore B+

- Remover a chave 80 (antes)



Árvore B+

- Remover a chave 80 (depois)





Árvore B+

■ Remoção com Redistribuição

- Se a página **P** e seu irmão adjacente **Q** possuem em conjunto $M-1$ ou mais chaves, estas podem ser equilibradamente distribuídas:
 - Concatena-se **P** e **Q**;
 - Efetua-se a cisão da página resultante.

Árvore B+

- Remover a chave 80 (redistribuição)

