Modelagem de Curvas

Prof. Márcio Bueno
{cgtarde,cgnoite}@marciobueno.com

Fonte: Material do Prof. Jack van Wijk

Conteúdo

- Curvas Paramétricas
- Requisitos
- Conceitos
- Intepolação Linear
- Interpolação de Lagrange
- Curva de Bézier

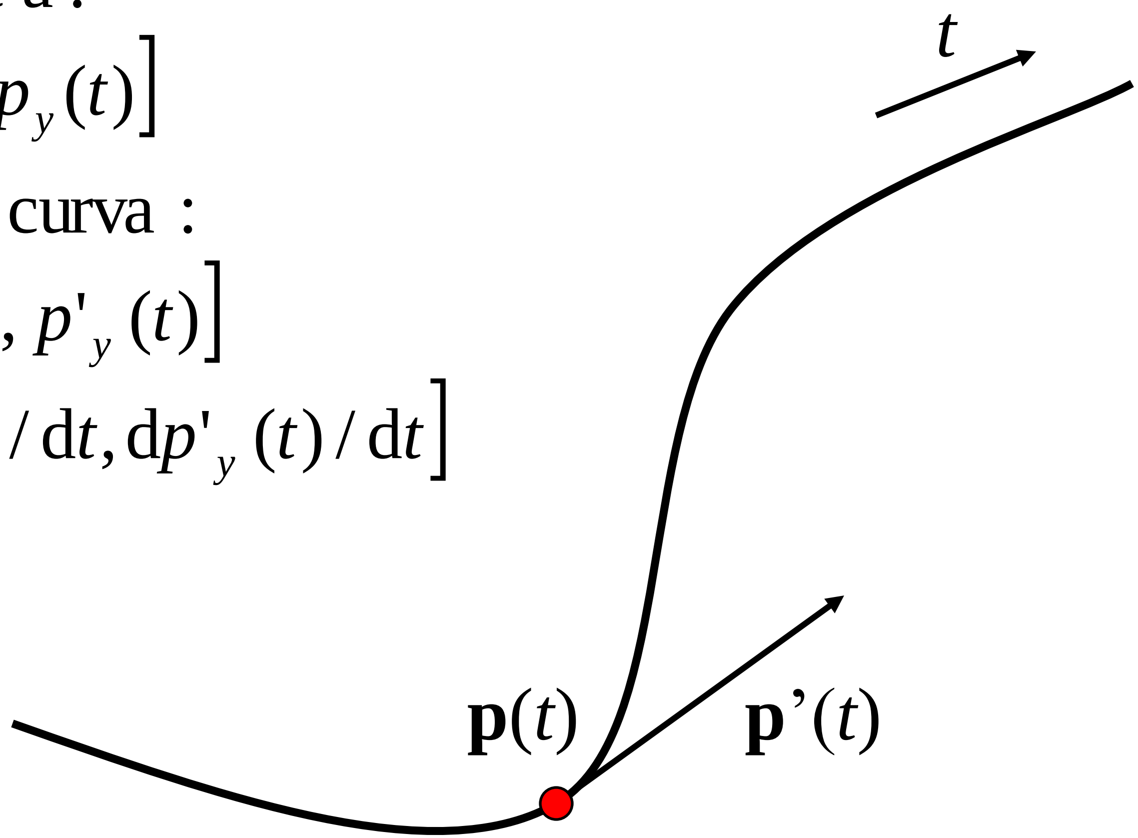
Curvas Paramétricas

Curva Paramétrica:

$$\mathbf{p}(t) = \left[p_x(t), p_y(t)\right]$$

Vetor tangente a curva:

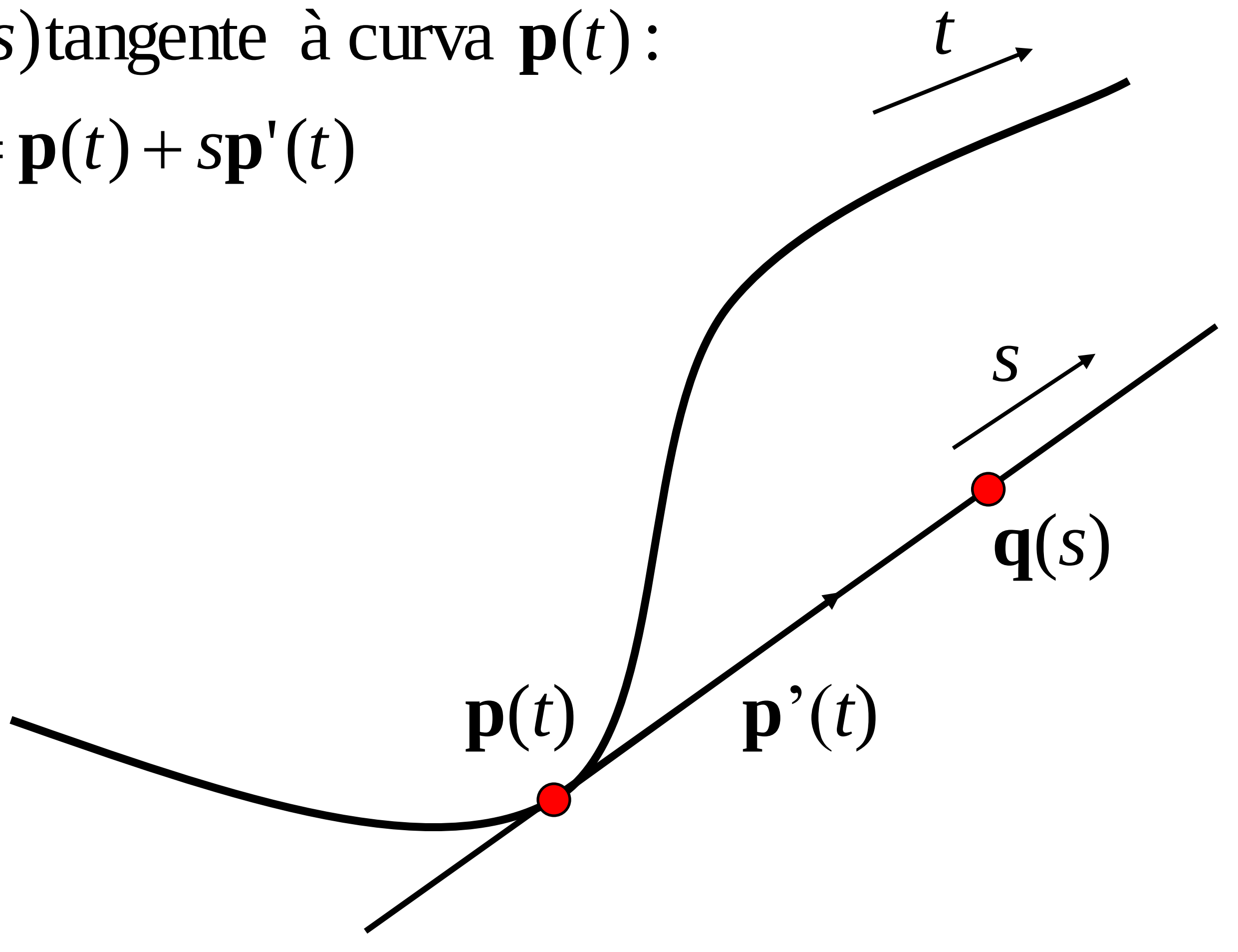
$$\mathbf{p}'(t) = \left[p'_x(t), p'_y(t)\right]$$
$$= \left[\mathrm{d}p_x(t)/\mathrm{d}t, \mathrm{d}p'_y(t)/\mathrm{d}t\right]$$



Linha Tangente à Curva

Linha $\mathbf{q}(s)$ tangente à curva $\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{p}(t) + s\mathbf{p}'(t)$$

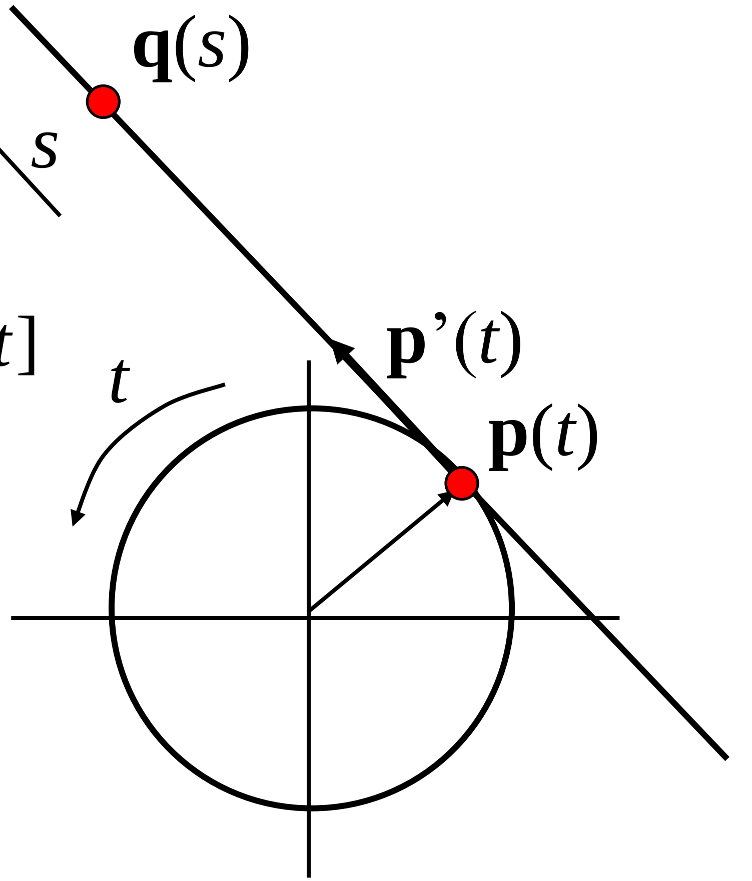


Exemplo

$$\mathbf{p}(t) = [\cos t, \sin t]$$

$$\mathbf{p}'(t) = [-\sin t, \cos t]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(s) \quad &= \mathbf{p}(t) + s\mathbf{p}'(t) \\ &= [\cos t - s \sin t, \sin t + s \cos t]\end{aligned}$$



Modelagem de Curvas

- Problema: Como definir uma curva suave?
- Solução:
  - Especificar uma seqüência de pontos $\mathbf{p}_i$, i = 1,…, N, (pontos-de-controle);
  - Gerar uma curva suave que *interpola* ou *aproxima* estes pontos-de-controle.

Requisitos

- Suave
  - nenhuma discontinuidade em direção e curvatura;
- Controle Local
  - alteração de um ponto deve ter efeito apenas local;
- Intuitivo e fácil de usar
  - sem oscilações, variação decrescente
- Aproximar or interpolar?

Interpolação Paramétrica

Fórmula Padrão:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i(t)\mathbf{p}_i,$$

$w_i(t)$ é a função de *weighting* ou de *blending* para o ponto $\mathbf{p}_i$.

Curva: média balanceada dos pontos-de-controle.

Requisito de $w_i(t)$:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i(t) = 1$$

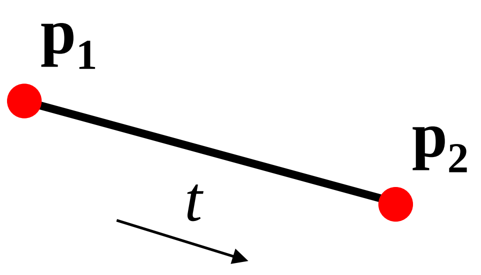
Interpolação Linear de Dois Pontos

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2, \text{ ou}$$

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^{2} w_i(t)\mathbf{p}_i, \text{ com}$$

$$w_1(t) = 1-t, \text{ e}$$

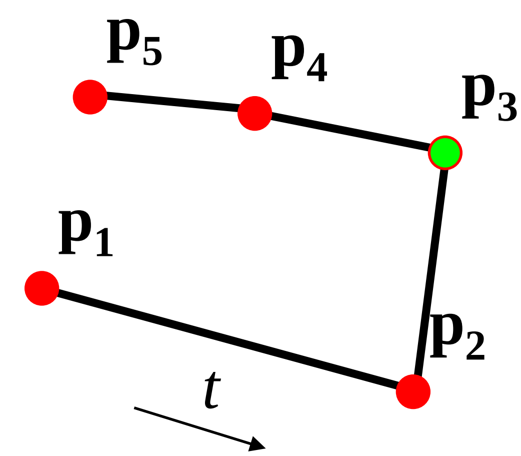
$$w_2(t) = t.$$

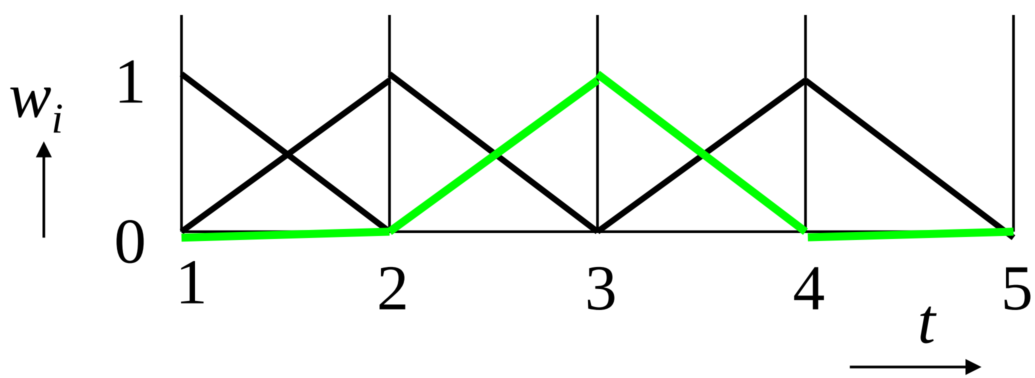


Interpolação Linear de N Pontos

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i(t)\mathbf{p}_i, 1 \le t \le N, \text{com}$$

$$w_i(t) = \begin{cases} t - i + 1 & \text{se } i - 1 \le t < i \\ 1 + i - t & \text{se } i \le t < i + 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$





Interpolação Linear

- **Não** é suave
- Controle local
- Intuitiva e fácil de usar
- Interpola

Interpolação de Lagrange - 1

Dado $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i(t)\mathbf{p}_i, 1 \le t \le N,$

podemos encontrar polinômios $w_i(t)$ tal que

os pontos-de-controle $\mathbf{p}_i$ estejam todos interpolados?

Seja $k = 1,2,\ldots,N$. Se

$$w_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

então $\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}_k$, isto é, $\mathbf{p}(t)$ interpola os pontos.

Interpolação de Lagrange - 2

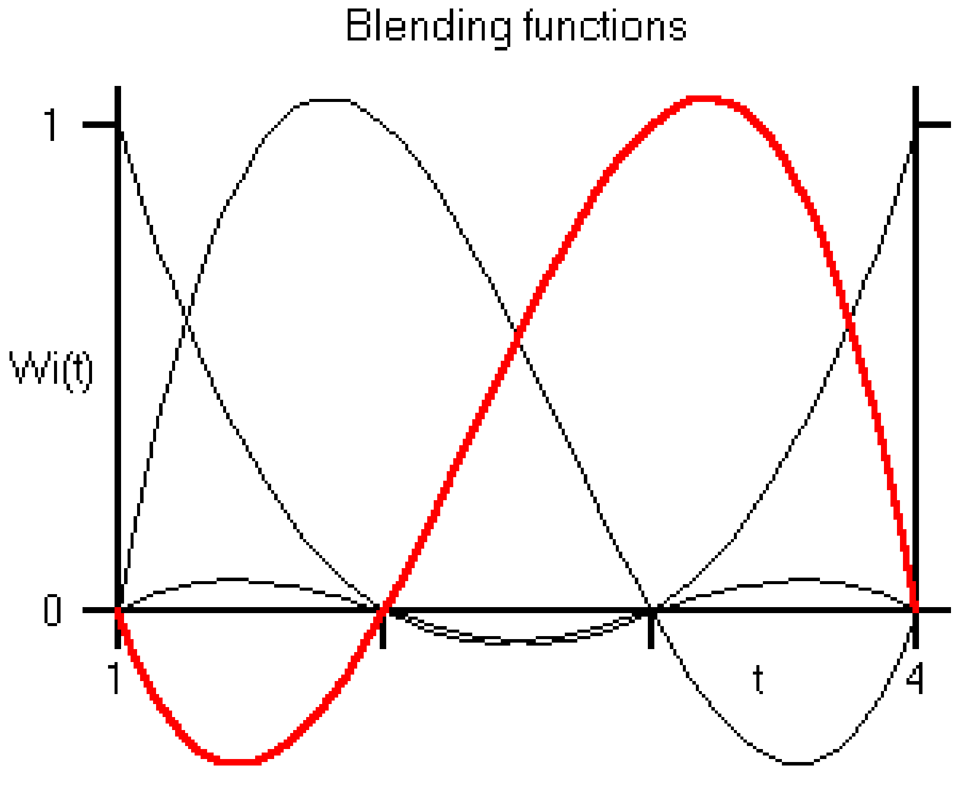
$$\text{Polinômio de Lagrange}: \quad w_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t-j}{i-j}$$

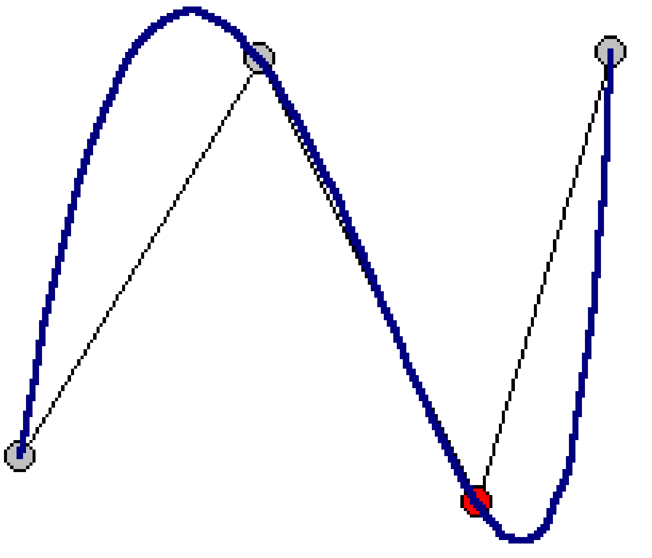
$$\text{satisfaz} \quad w_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = i \\ 0 & \text{if } k \neq i \end{cases}$$

$$\text{Exemplo para N} = 4:$$

$$w_1(t) = \frac{(t-2)(t-3)(t-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{13}{2}t + 4$$

Interpolação de Lagrange - 3



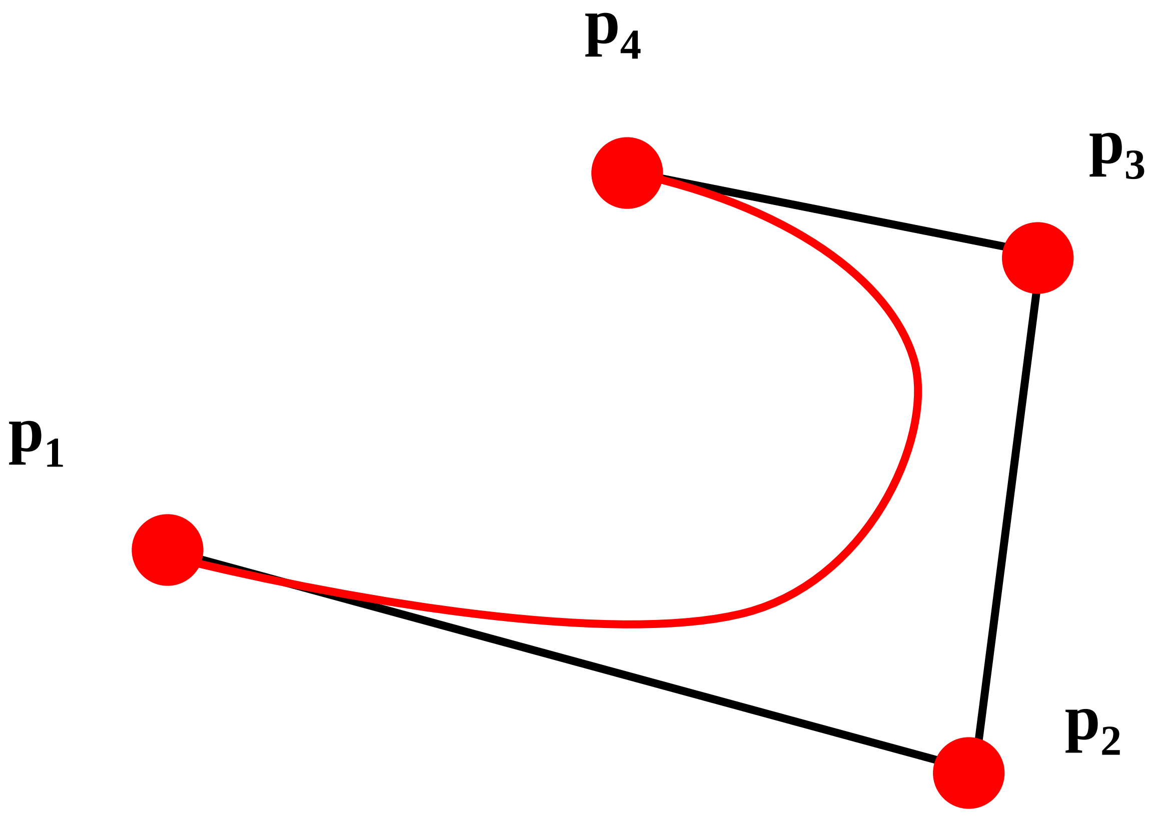


Interpolação de Lagrange - 4

- Suave
  - nenhuma discontinuidade em direção e curvatura
- SEM controle local
- Oscilações radicais, sem variações decrescentes!
- Interpola

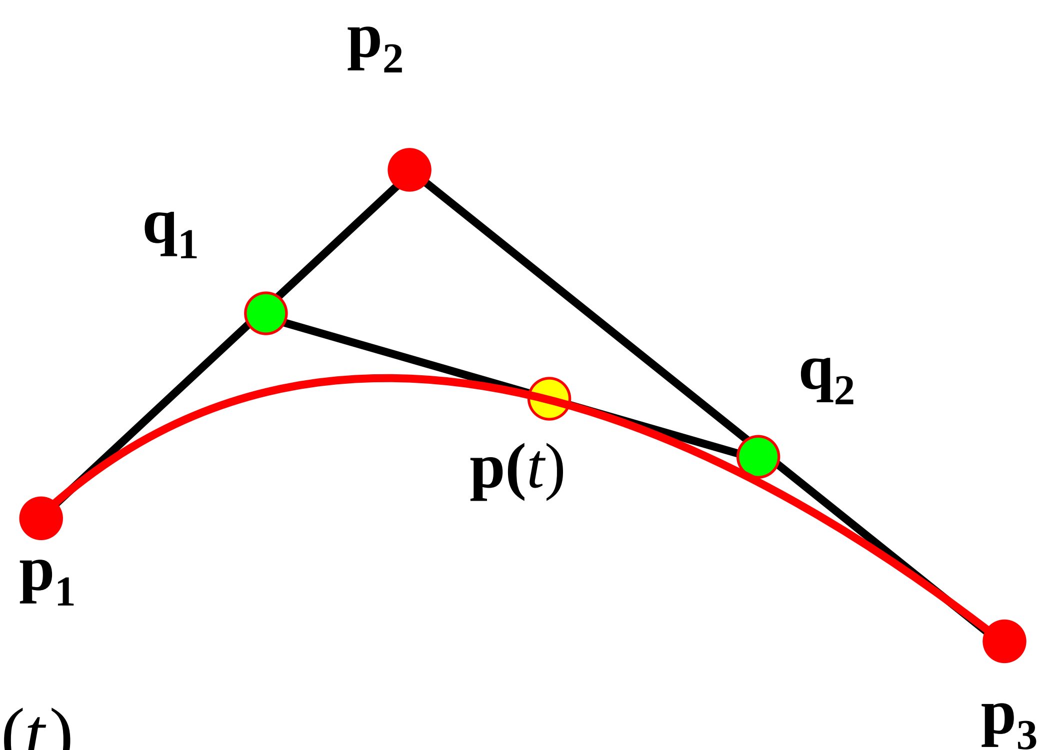
Curva de Bézier - 1

- Quebra-cabeça: Defina uma curva suave que interpola o primeiro e último ponto e aproxima os outros.



Curva de Bézier - 2

- Solução para N=3:



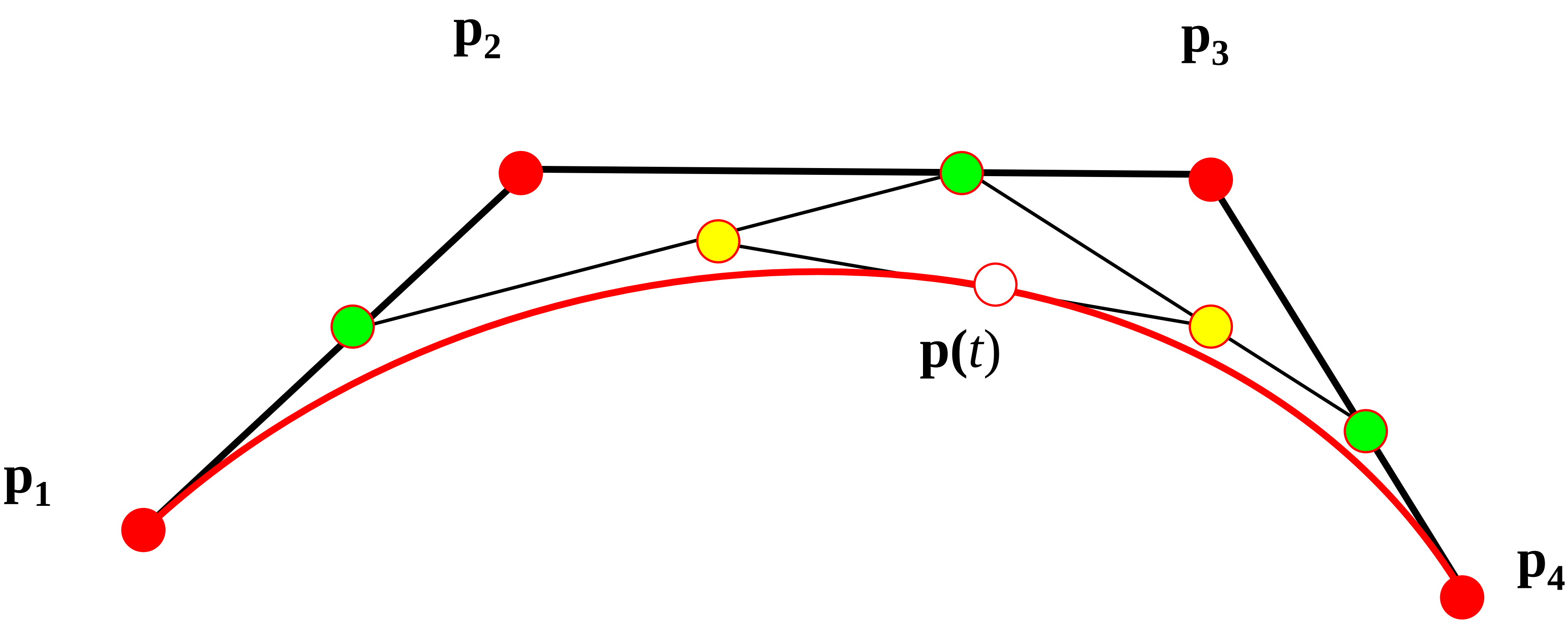
$$\mathbf{q}_1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{q}_2(t) = (1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) = \quad & (1-t)\mathbf{q}_1(t) + t\mathbf{q}_2(t) \\ & (1-t)((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2) + t((1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3) \\ & (1-t)^2\mathbf{p}_1 + 2(1-t)t\mathbf{p}_2 + t^2\mathbf{p}_3\end{aligned}$$

Curva de Bézier - 3

- Solution for N=4:



$$\mathbf{p}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_1 + 3(1-t)^2 t\mathbf{p}_2 + 3(1-t)t^2\mathbf{p}_3 + t^3\mathbf{p}_4$$

Curva de Bézier - 4

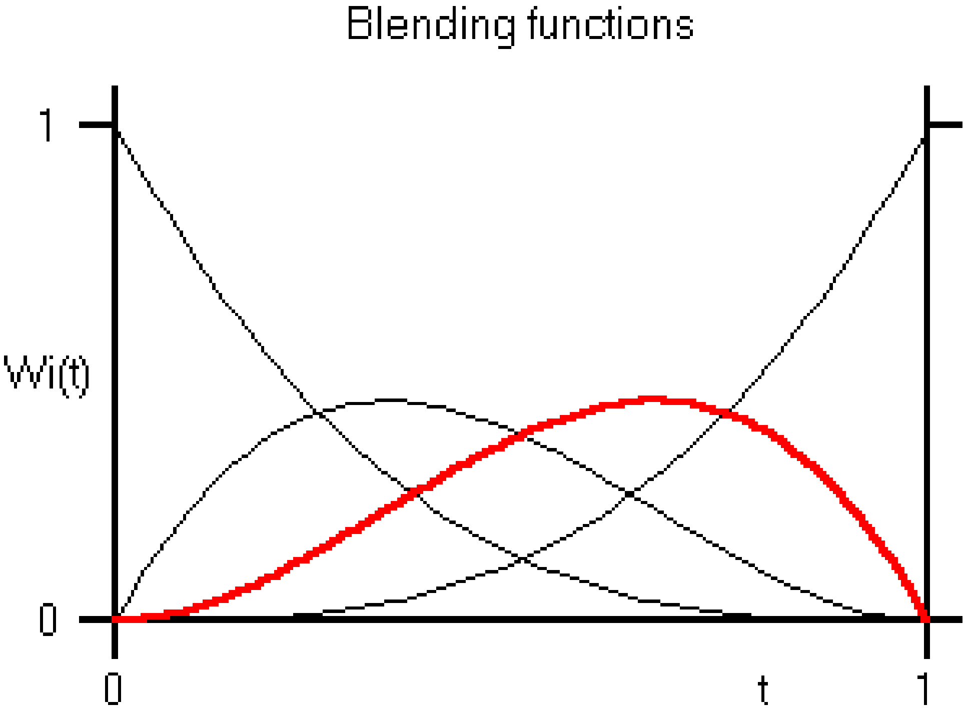
$$N+1 \text{ pontos}:$$

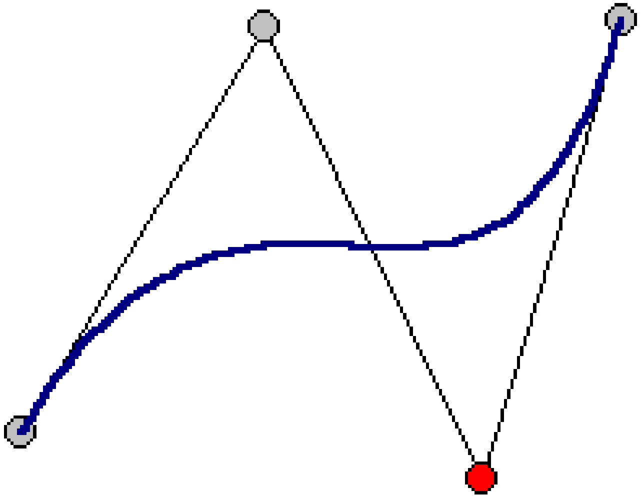
$$\mathbf{p}(t)=\sum_{i=0}^{N} B_{i,N}(t)\mathbf{p}_i,\ 0 \le t \le 1,\ \text{com}$$

$$B_{i,N}(t)=\frac{N!}{(N-i)!\,i!}(1-t)^{n-i}t^{i}$$ (Polinômio de Bernstein)

-

Bézier curve - 5





Bézier curve - 6

Curva de Bézier geral:

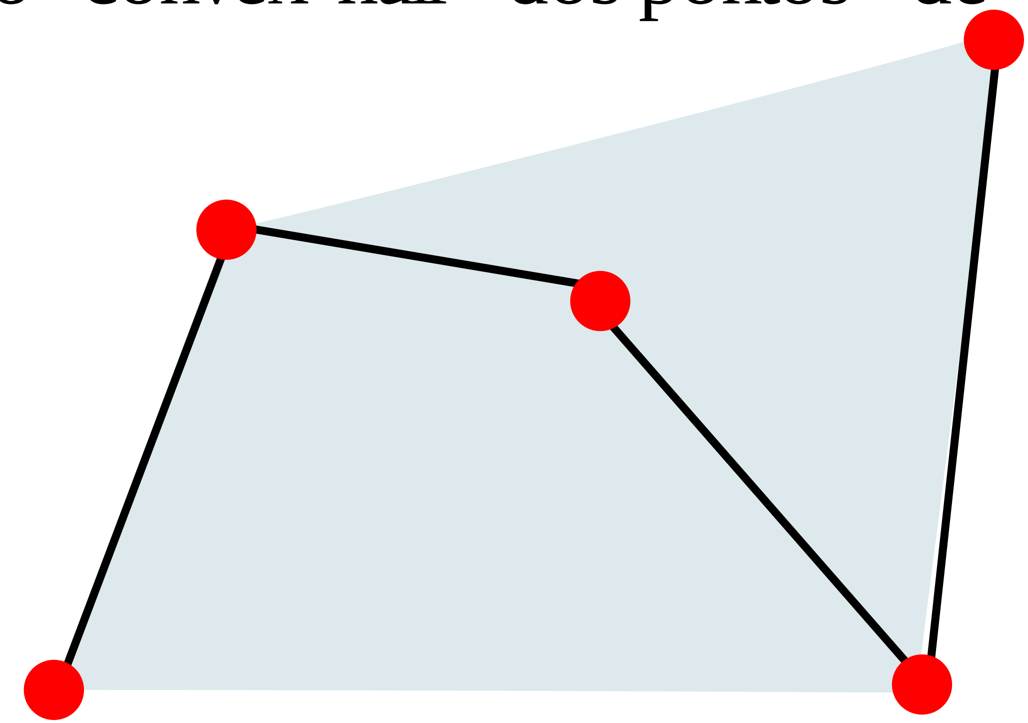
- Grau = #pontos-1
- Suave
  - nenhuma discontinuidade em direção e curvatura;
- SEM controle local
- Variações decrescentes, propriedade do "convex hull"
- Interpola o primeiro e o último ponto e aproxima os outros pontos

Propriedade do "convex hull"

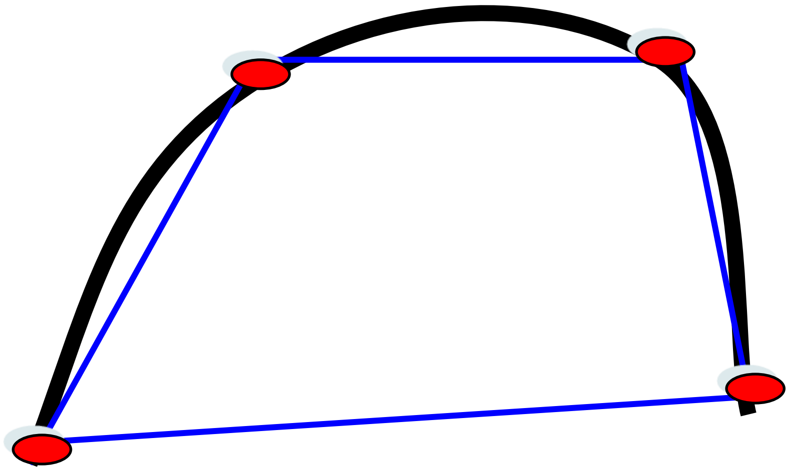
"Convex hull" de um conjunto de pontos : é o menor polígono convexo que contém todos os pontos. A curva está contida dentro do "convex hull" dos pontos-de-controle se :

$$\sum_{i} w_i(t) = 1 \quad \text{e}$$

$$w_i(t) \geq 0$$

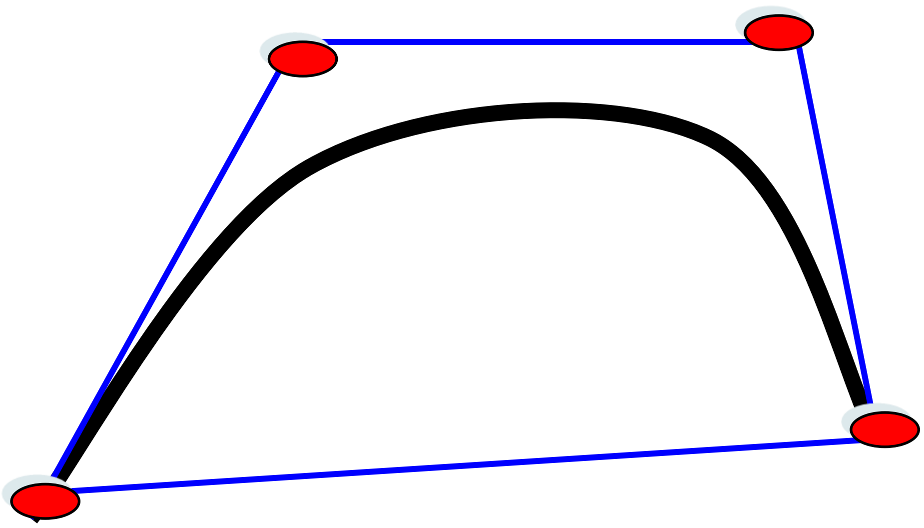


Exemplo da Propriedade do "Convex Hull"



Curva fora do

"convex hull"

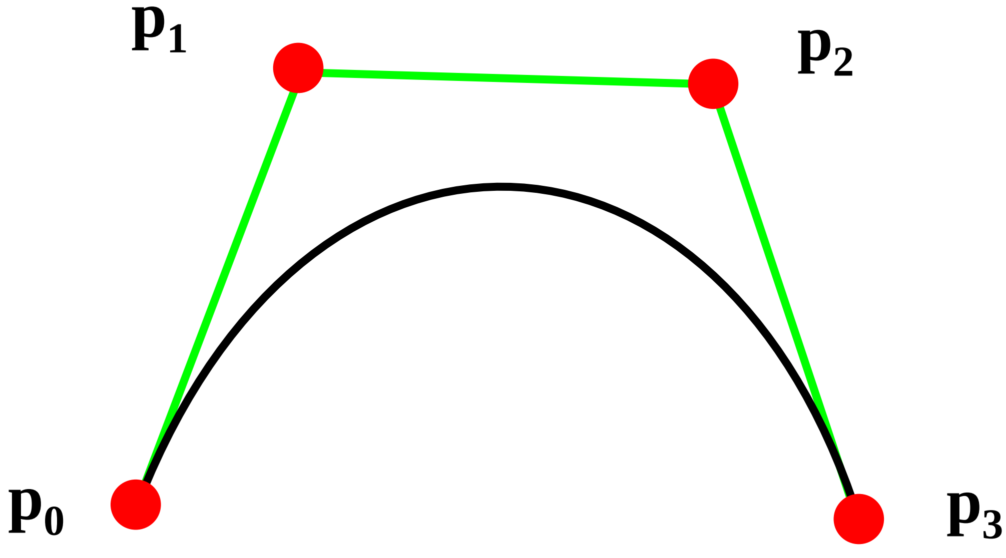


Curva dentro do

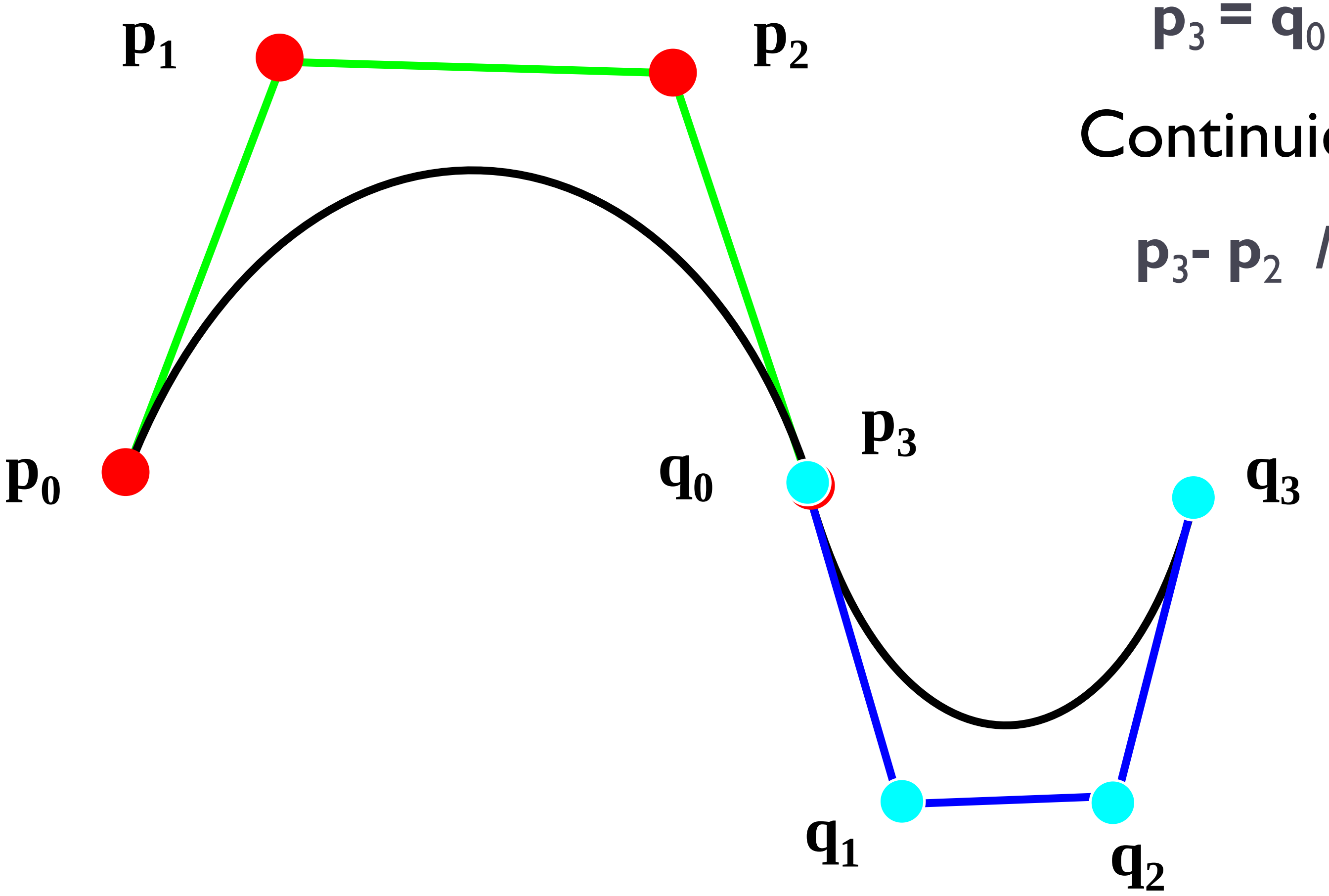
"convex hull"

Curva de Bézier Cúbica

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{p}(0) &= \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}'(0) &= 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \\ \mathbf{p}(1) &= \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}'(1) &= 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \end{aligned}$$



Juntando dois segmentos de Bezier



Continuidade posicional:

$p_3 = q_0$

Continuidade tangencial:

$p_3 - p_2 \; // \; q_1 - q_0$

Quebra-cabeça 1: Limite na interpolação

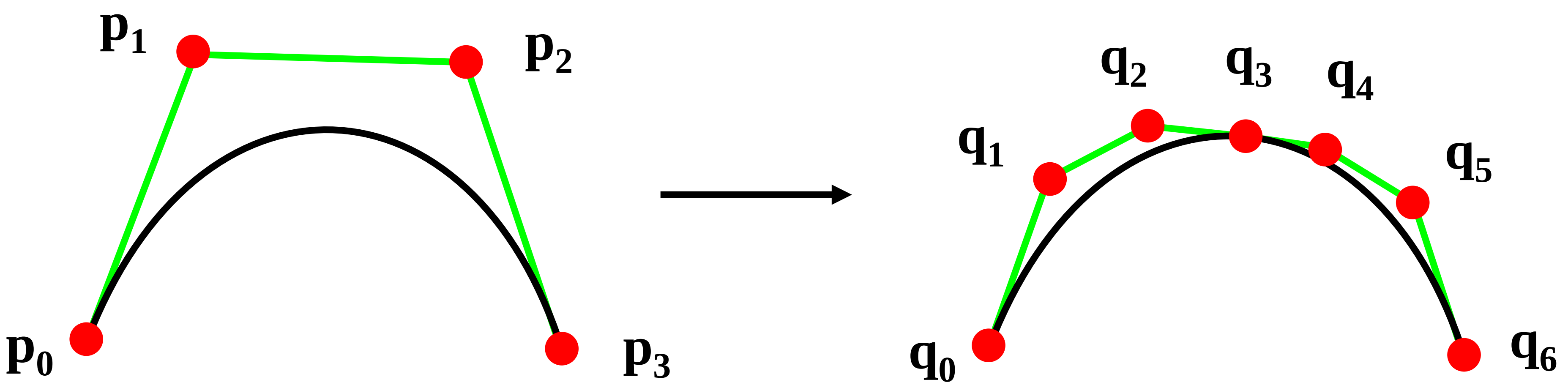
Descubra por que uma curva que

- interpola os pontos de controle
- está contida no "convex hull",
- e é suave

não existe, nem graficamente nem matematicamente.

Quebra-cabeça 2: Dividir curva de Bezier

- Encontre uma receita para dividir um segmento de curva de Bezier cúbica em dois segmentos:



Finalmente...

- Curvas: interpolação de pontos
  - Interpolação é geralmente aplicável ➔ superfícies: interpolação de curvas

- Programa de Exemplo:

  http://www.win.tue.nl/~vanwijk/2M050/spline.exe