Transformações 3D

Prof. Márcio Bueno
{cgtarde,cgnoite}@marciobueno.com

Fonte: Material do Prof. Robson Pequeno de Sousa e do Prof. Robson Lins

Transformações 3D

- Transformações básicas 3D
  - Translação
  - Mudança de Escala
  - Rotação
  - Cisalhamento
  - Reflexão
- Como no caso 2D, utilizam-se coordenadas homogêneas (x,y,z,w)
- As transformações são compostas via multiplicações de matrizes

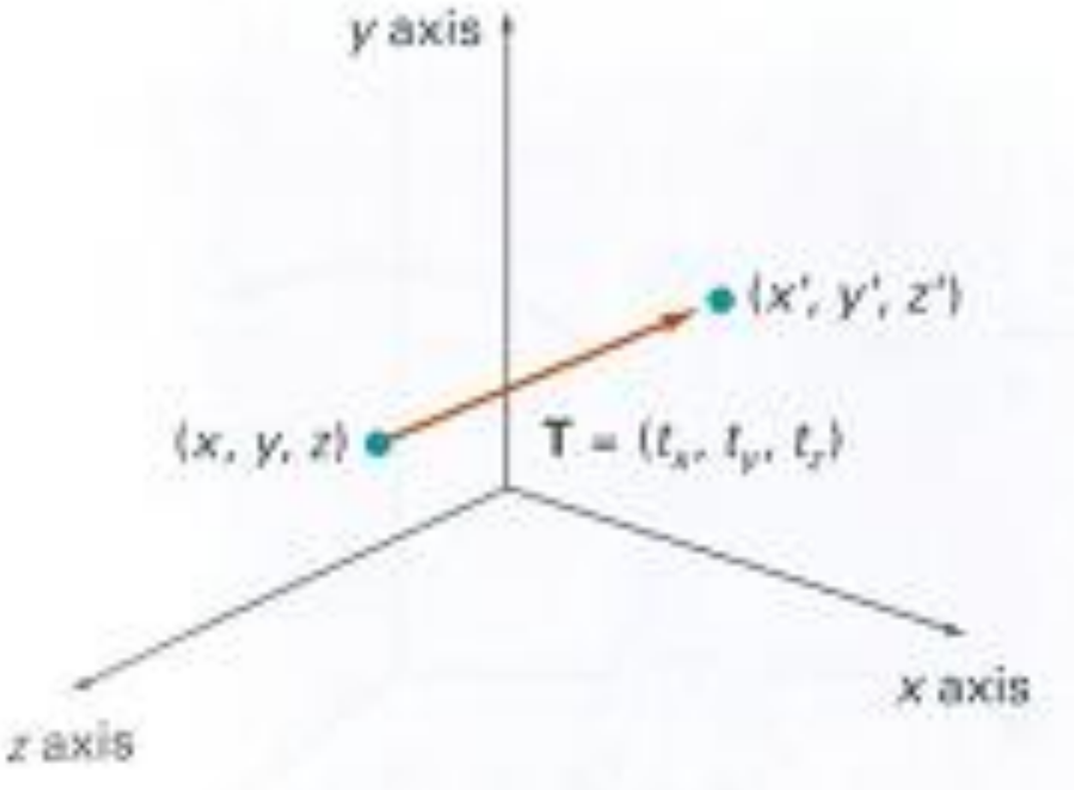
Translação 3D

$TP = (x + t_x,\ y + t_y,\ z + t_z)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Translação 3D

- Translação do ponto (x,y,z) para (x',y',z')



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala 3D

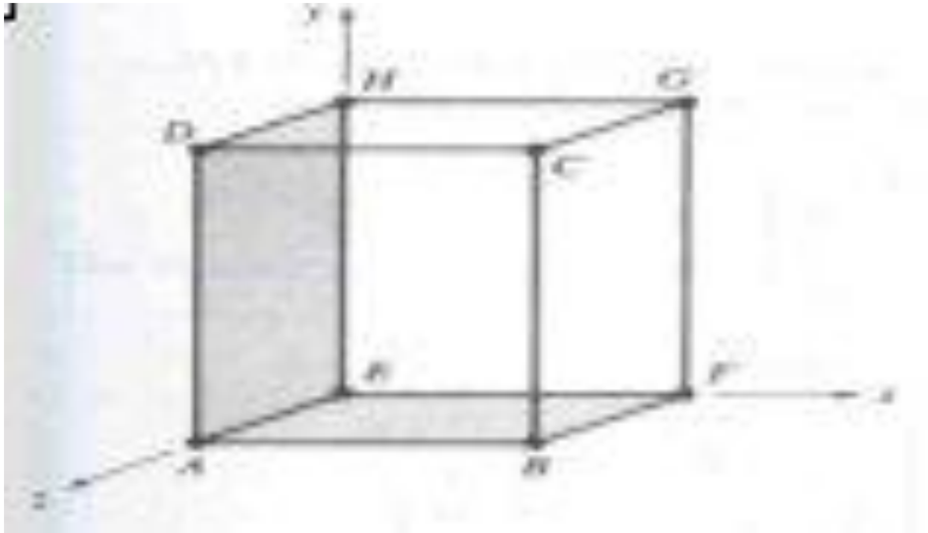
$SP = (s_x x,\ s_y y,\ s_z z)$

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Escala 3D

- Considere o paralelepípedo mostrado na figura abaixo, com vetores de posição homogêneos. Escale por fatores de 1/2, 1/3 e 1. Aplique

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Escala 3D Geral

- Mudança de escala em relação a um ponto fixo fora da origem
  - Transladar o ponto fixo para a origem
  - Aplicar a mudança de escala
  - Aplicar a translação inversa para levar o ponto fixo à sua posição original

Rotação 3D

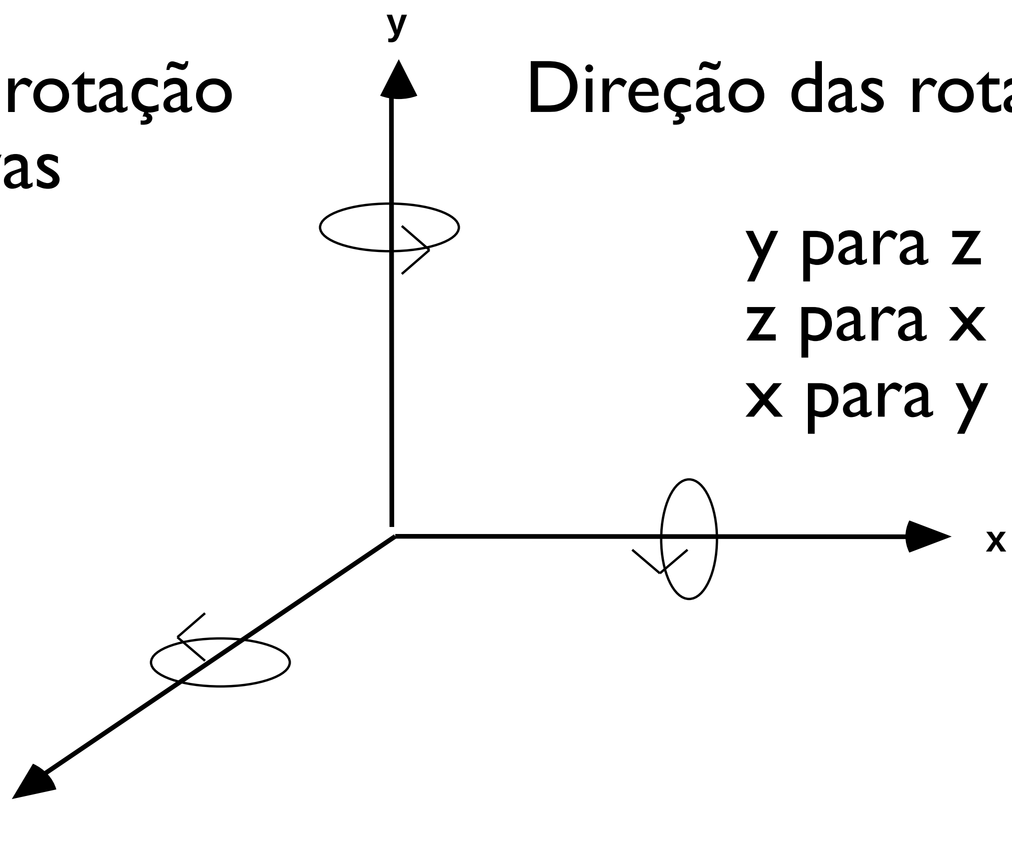
Rotações positivas são definidas como:

Eixo de rotação positivas

- x
- y
- z

Direção das rotações

- y para z
- z para x
- x para y



Rotação 3D

- Note que a rotação em 2D é justamente uma rotação em torno do eixo z em 3D
- Matriz de rotação em torno do eixo-z: $R_z(\beta)P$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

Matrizes de rotação em torno dos eixos x e y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D Geral

- Quando o eixo de rotação for paralelo a um dos eixos coordenados
  - Transladar o objeto para que o eixo de rotação coincida com o eixo coordenado
  - Realizar a rotação em torno desse eixo
  - Aplicar a translação inversa para levar o eixo de rotação à sua posição original

Rotação 3D Geral

- Quando o eixo de rotação não for paralelo a um dos eixos coordenados
  - Transladar o objeto para que o eixo de rotação passe na origem do sistema de coordenadas
  - Rodar o objeto para que o eixo de rotação coincida com um dos eixos coordenados
  - Realizar a rotação em torno desse eixo
  - Aplicar a rotação inversa para levar o eixo de rotação a sua orientação original
  - Aplicar a translação inversa para levar o eixo de rotação à sua posição original

Cisalhamento 3D

cisalhamento em xy produz um cisalhamento no eixo z

$$SH_{xy}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão 3D

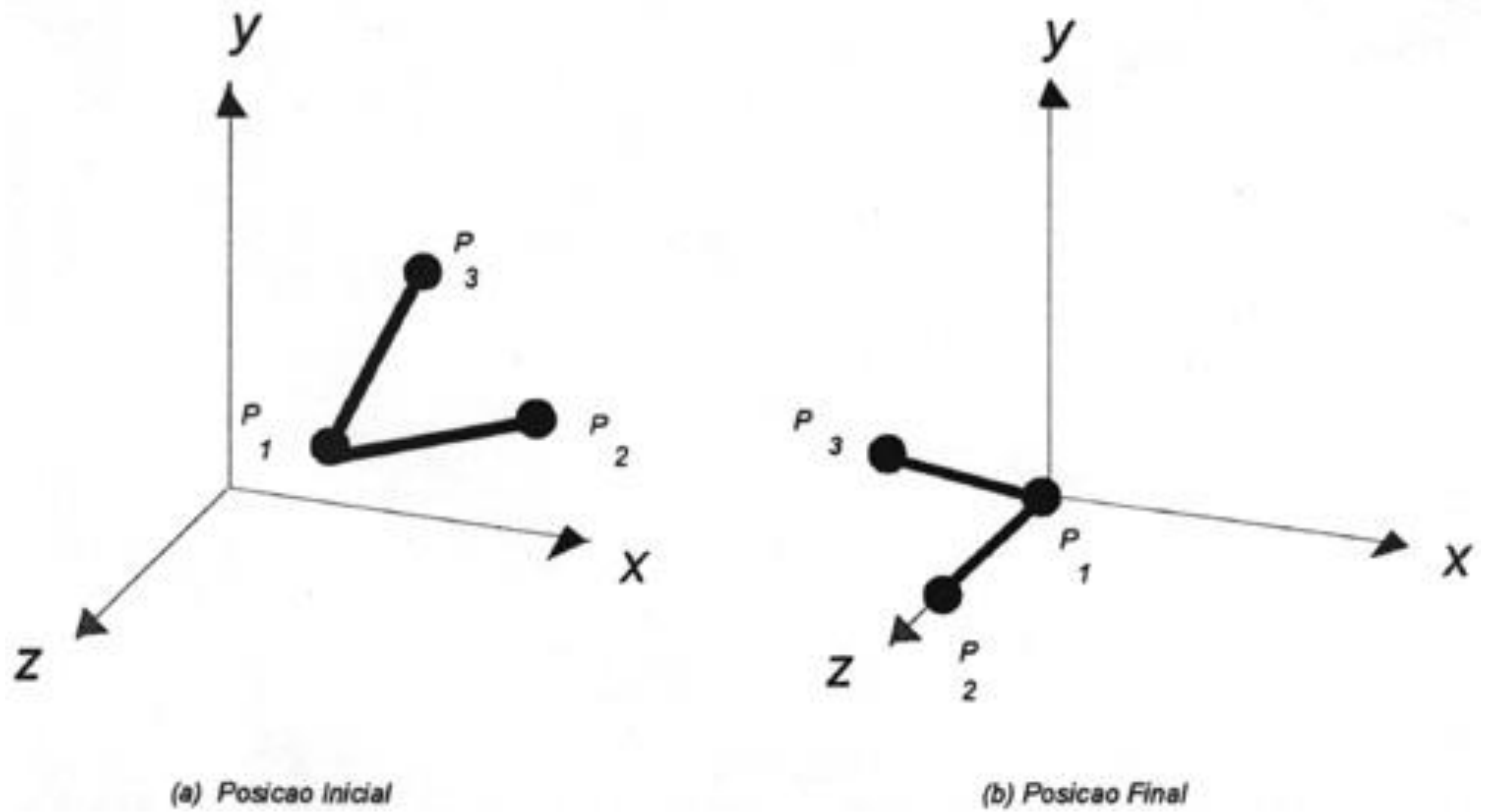
- Reflexão em torno dos planos xy, yz e xz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Plano xy — Plano yz — Plano xz

Composição de Transformações

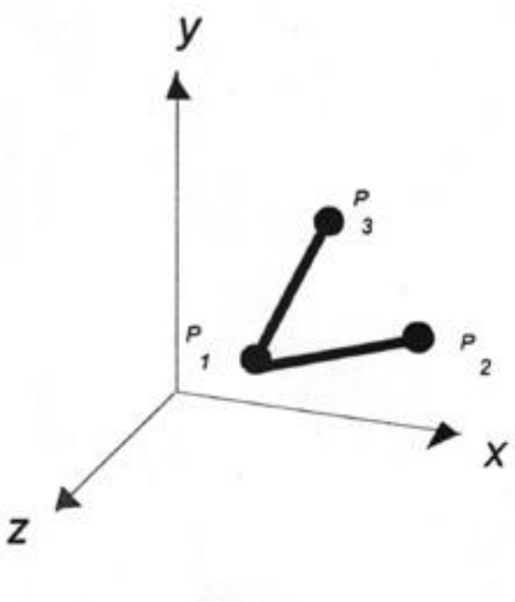
- Composição em 3D



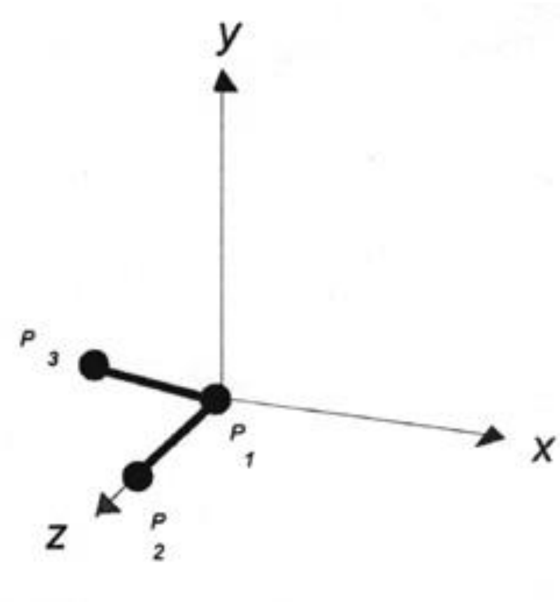
Transformando P1, P2 e P3 da posição inicial em (a) para a posição final em (b).

Solução

Para resolver utilize a composição das primitivas de transformação T, R_x, R_y e R_z.



(a) Posicao Inicial



(b) Posicao Final

i) Transladar P_1 para a origem.

ii) Rotacionar o segmento P_1P_2 em relação ao eixo **y**, de forma que ele (P_1P_2) fique no plano **y-z**.

iii) Rotacionar o segmento P_1P_2 em relação ao eixo **x**, de forma que ele (P_1P_2) fique sobre o eixo **z**.

iv) Rotacionar o segmento P_1P_3 em relação ao eixo **z**, de forma que ele (P_1P_3) fique no plano **y-z**.

Primeiro passo: Transladar P_1 para a origem

$$T(-x_1, -y_1, -z_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Aplicando T a P_1, P_2 e P_3, temos:

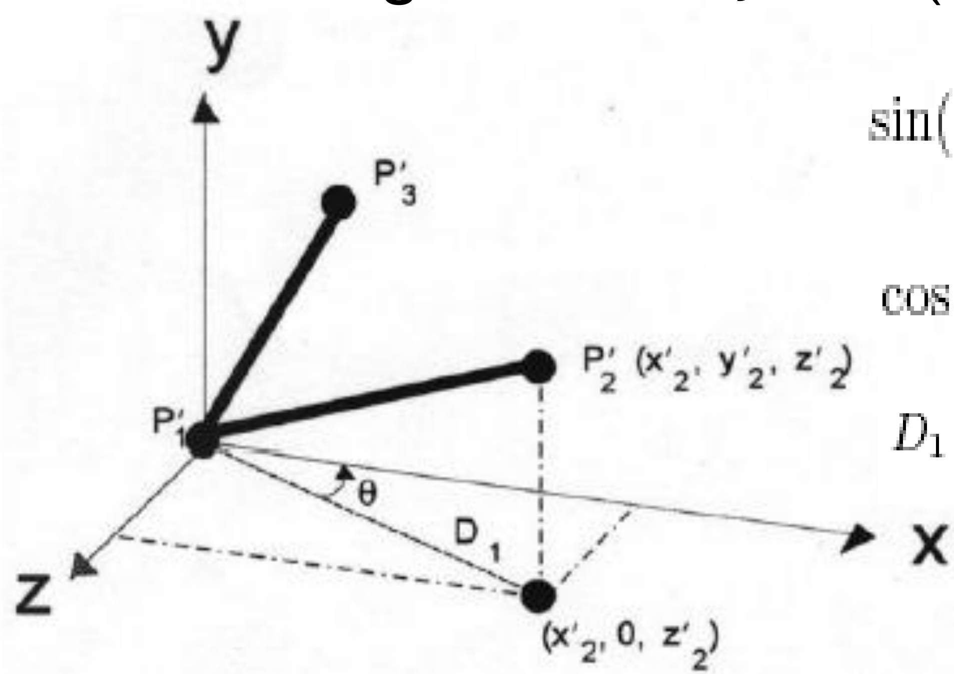
$$P_1' = T(-x_1, -y_1, -z_1) \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2' = T(-x_1, -y_1, -z_1) \cdot P_2 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3' = T(-x_1, -y_1, -z_1) \cdot P_3 = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Segundo passo: Rotacionar em relação ao eixo Y

- O ângulo de rotação é -(90° - θ) = θ - 90°



$$\sin(\theta - 90^o) = -\cos\theta = -\frac{x_2'}{D_1} = -\frac{x_2 - x_1}{D_1}$$

$$\cos(\theta - 90^o) = \sin\theta = \frac{z_2'}{D_1} = \frac{z_2 - z_1}{D_1}$$

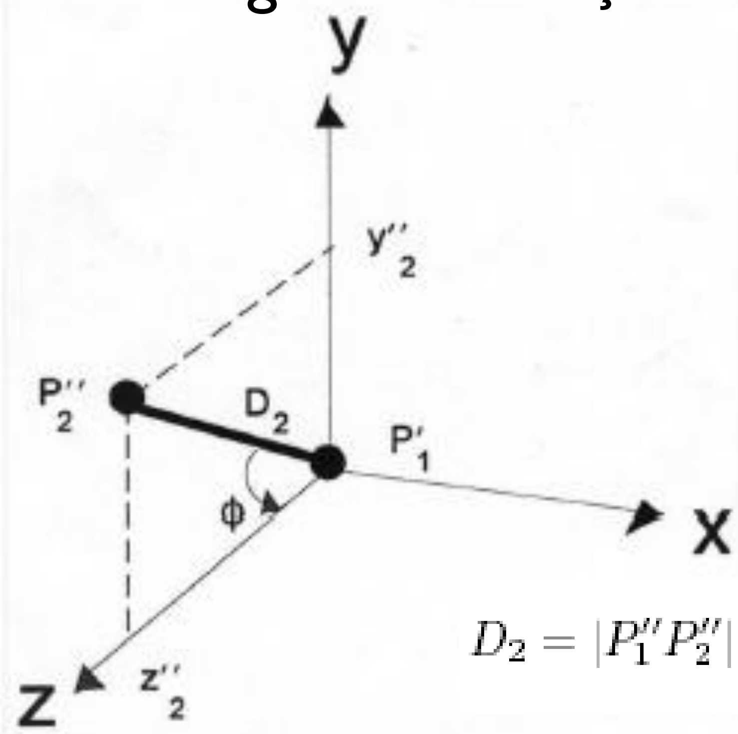
$$D_1 = \sqrt{(z_2')^2 + (x_2')^2} = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

- Substituindo os valores na matriz de rotação R_y

$$P_2'' = R_y(\theta - 90^o) \cdot P_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - y_1 \\ D_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terceiro passo: Rotacionar em relação ao eixo X

- O ângulo de rotação é ϕ:



$$\cos\phi = \frac{z_2''}{D_2}$$

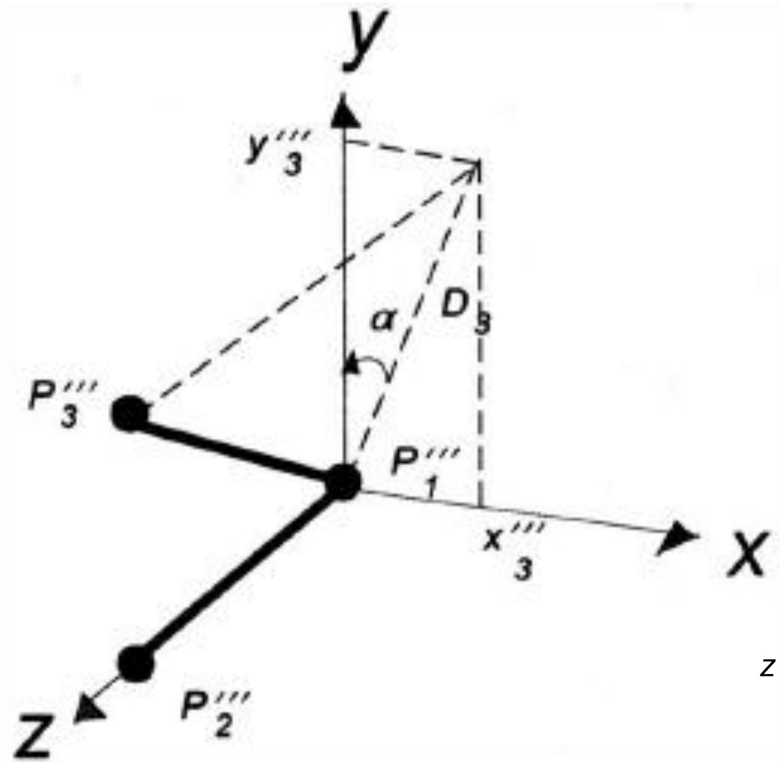
$$\sin\phi = \frac{y_2''}{D_2}$$

$$D_2 = |P_1''P_2''| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$P_2''' = R_x(\phi)\cdot P_2'' = R_x(\phi)\cdot R_y(\theta-90^o)\cdot P_2' = R_x(\phi)\cdot R_y(\theta-90^o)\cdot T\cdot P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ |P_1P_2| \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quarto passo: Rotacionar em relação ao eixo Z

- A rotação é dada pelo ângulo positivo α:



$$\cos\alpha = \frac{y_3'''}{D_3}$$

$$\sin\alpha = \frac{x_3'''}{D_3}$$

$$D_3 = \sqrt{x_3'''^2 + y_3'''^2}$$

$$M = R_x(\alpha)\cdot R_x(\phi)\cdot R_y(\theta - 90^o)\cdot T(-x_1, -y_1, -z_1) = R\cdot T$$