Transformações 2D

Prof. Márcio Bueno
{cgtarde,cgnoite}@marciobueno.com

Fonte: Material do Prof. Robson Pequeno de Sousa e do Prof. Robson Lins

Transformações 2D

- Transformações Geométricas são a base de inúmeras aplicações gráficas

- O que são elas?
  - São usadas para mostrar ou representar objetos gráficos
  - Matemática: Mapeamento entre valores (função/relação)
  - Geométrica: translação, rotação, escala, cizalhamento,…

- Porque são importantes em computação gráfica?
  - Move o objeto na tela / no espaço
  - Mapeamento do modelo no espaço para a tela.

Transformações 2D

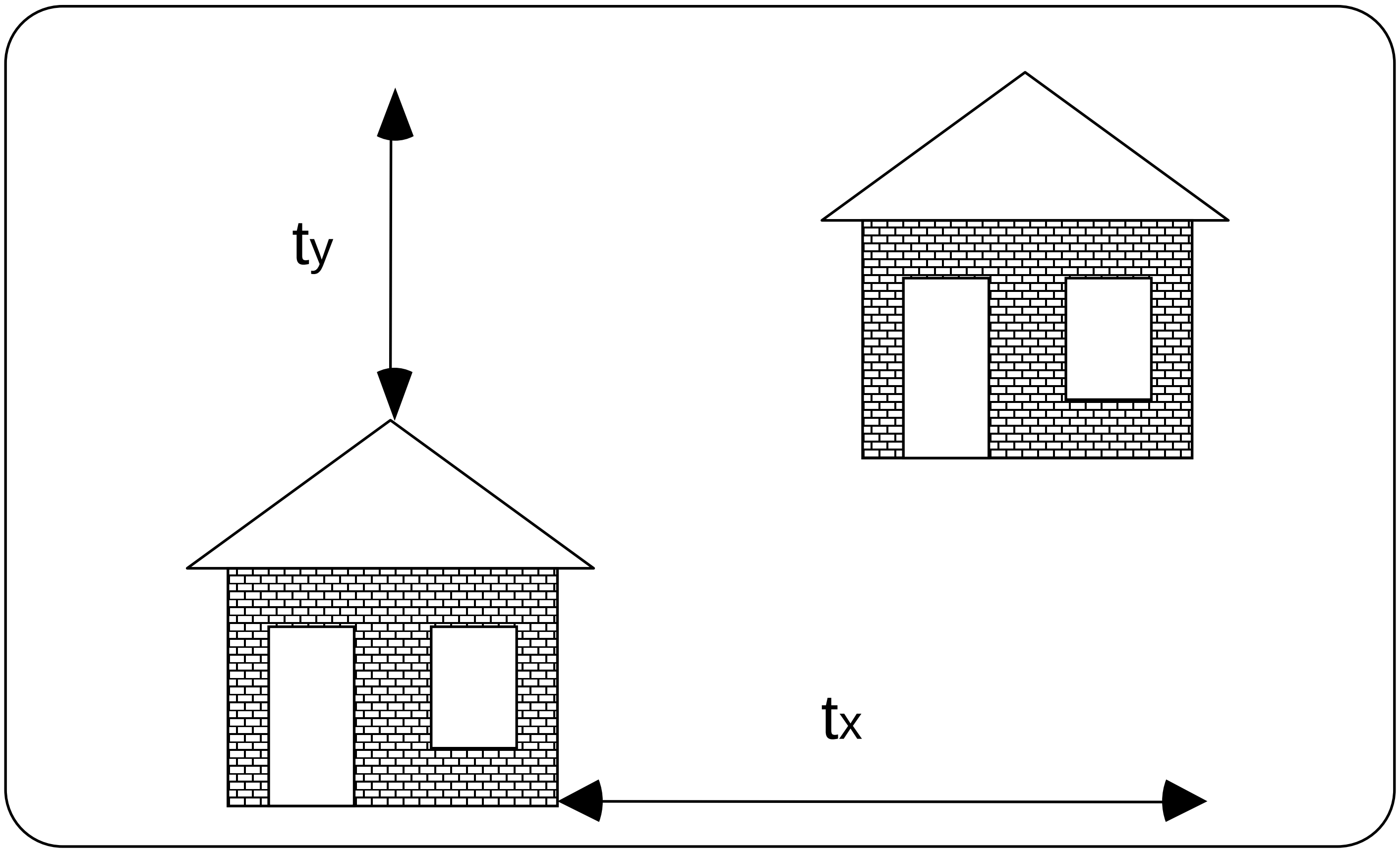
- Exemplos de aplicações de transformações geométricas:
  - Programa para representar *layouts* de circuitos eletrônicos.
  - Programas de planejamento de cidades
    - Movimentos de translação para colocar os símbolos que definem edifícios e árvores em seus devidos lugares, rotações para orientar corretamente esses símbolos, e alteração de escala para adequar o tamanho desses símbolos, etc.
  - sistemas de software sofisticados que permitem a construção de cenas realistas.

Transformações Geométricas 2D

- Transformações básicas
  - Translação (*Translation*) (T)
  - Escala (*scaling*) (S)
  - Rotação (*rotation*) (R)
- Outras Transformações
  - Reflexão (*reflection*)
  - Cizalhamento (*shear*)

Translação

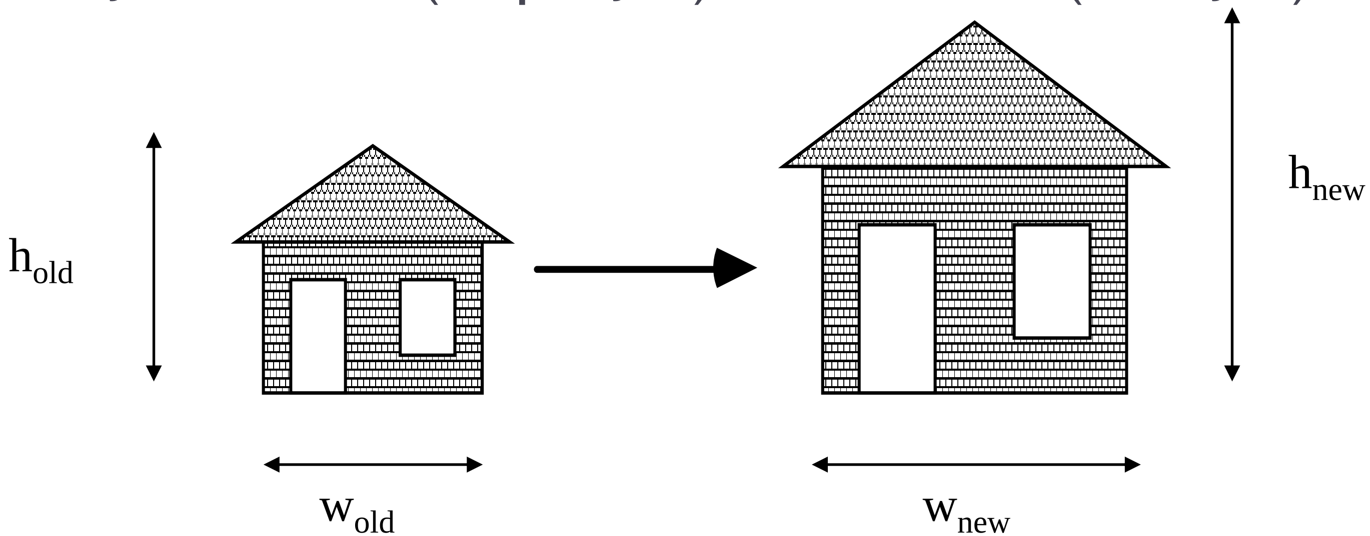
- Deslocamento do objeto no espaço



$x_{new} = x_{old} + t_x$ $y_{new} = y_{old} + t_y$

Escala

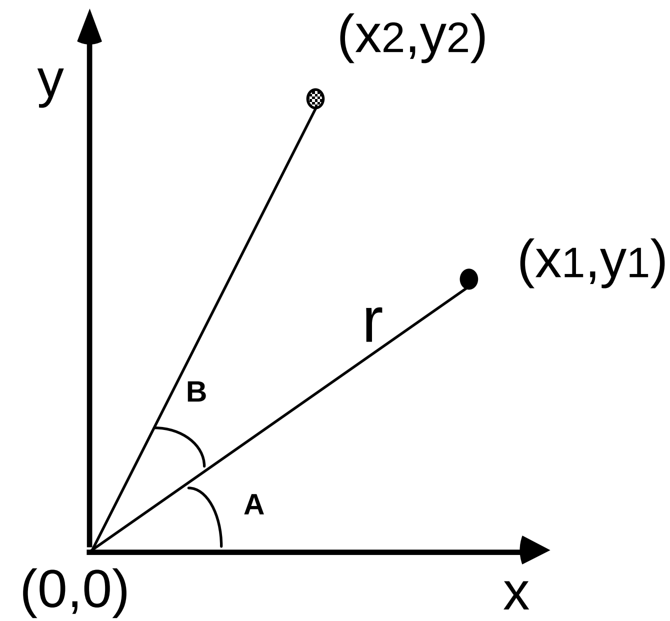
- Mudança de Escala
  - O uso clássico desta operação em computação gráfica é a função *zoom in* (ampliação) ou *zoom out* (redução)



$$x_{new} = s_x x_{old} \qquad y_{new} = s_y y_{old}$$

Rotação em Torno da Origem

- A **rotação** é o giro de um determinado ângulo de um ponto em torno de um ponto de referência, sem alteração da distância entre eles.
- Queremos girar (x_1,y_1) para o ponto (x_2,y_2) pelo ângulo **B**



- Da figura temos:

$\text{sen}\,(A + B) = y_2/r \quad \cos\,(A + B) = x_2/r$

$\text{sen}\,A = y_1/r \qquad \cos A = x_1/r$

Rotação em Torno da Origem

- Sabemos que: $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

Substituindo,

$$y_2/r = (y_1/r)\cos B + (x_1/r)\sin B$$

multiplicando por r, tem-se que:

$$y_2 = y_1 \cos B + x_1 \sin B$$

Por fim:

$$x_2 = x_1 \cos B - y_1 \sin B$$

$$y_2 = x_1 \sin B + y_1 \cos B$$

Transformações como Matrizes

Translação: $\mathbf{x_{new} = x_{old} + t_x}$

$\mathbf{y_{new} = y_{old} + t_y}$

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{bmatrix}$$

Escala: $\mathbf{x_{new} = s_x x_{old}}$

$\mathbf{y_{new} = s_y y_{old}}$

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações como Matrizes

- Rotação:

$$x_2 = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$$

$$y_2 = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos(B) - y_1 sen(B) \\ x_1 sen(B) + y_1 \cos(B) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(B) & -sen(B) \\ sen(B) & \cos(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

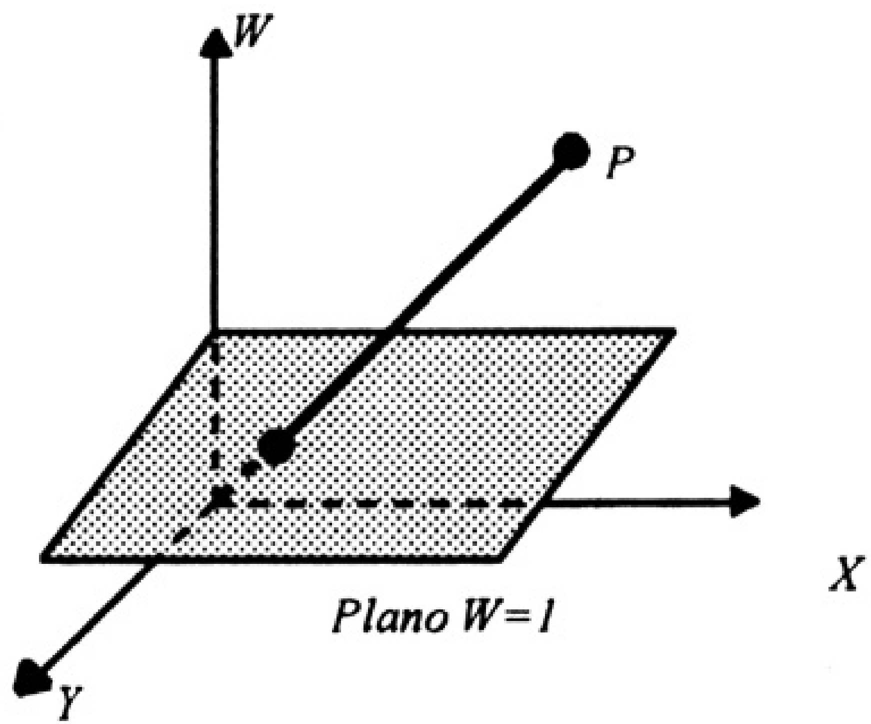
- Infelizmente, a translação é tratada de forma diferente (como uma soma) das outras - Rotação e Escala são tratadas através de multiplicações.
  - $P' = T + P$
  - $P' = S \cdot P$
  - $P' = R \cdot P$
- Para que possamos combinar facilmente essas transformações, devemos tratar do mesmo modo todas as 3 transformações.
- Se os pontos são expressos em **Coordenadas Homogêneas**, todas as 3 transformações podem ser tratadas como multiplicações.

Coordenadas Homogêneas

- As coordenadas homogêneas de um ponto (x,y) são
  - (x', y', w), em que x = x'/w, y = y'/w e w é qualquer número real diferente de 0
- Um conjunto de coordenadas homogêneas é sempre da forma (x, y, 1)
  - Essa forma representa o ponto (x,y)
- Todas as outras coordenadas homogêneas são da forma (wx,wy,w)
- Note que a representação em coordenadas homogêneas não é única
  - Por exemplo: (6,4,2), (12,8,4), (3,2,1) representam o ponto (3,2)

Coordenadas Homogêneas

- Interpretação geométrica
  - Os pontos em coordenadas homogêneas formam o plano definido pela equação w=1 no espaço (x,y,w)



Transformações e Coordenadas Homogêneas

- Assim, as transformações de um ponto em coordenas homogêneas podem ser tratadas como multiplicações

$$P' = \begin{cases} T.P \rightarrow Transl. \\ S.P \rightarrow Escala \\ R.P \rightarrow Rotaçao \end{cases}$$

$$P_{(x,y)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações e Coordenadas Homogêneas

$$T_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_{x,y} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

- Suponha que queremos realizar multiplas transformações sobre um ponto:

$$P_2 = T_{3,1}P_1$$

$$P_3 = S_{2,2}P_2$$

$$P_4 = R_{30}P_3$$

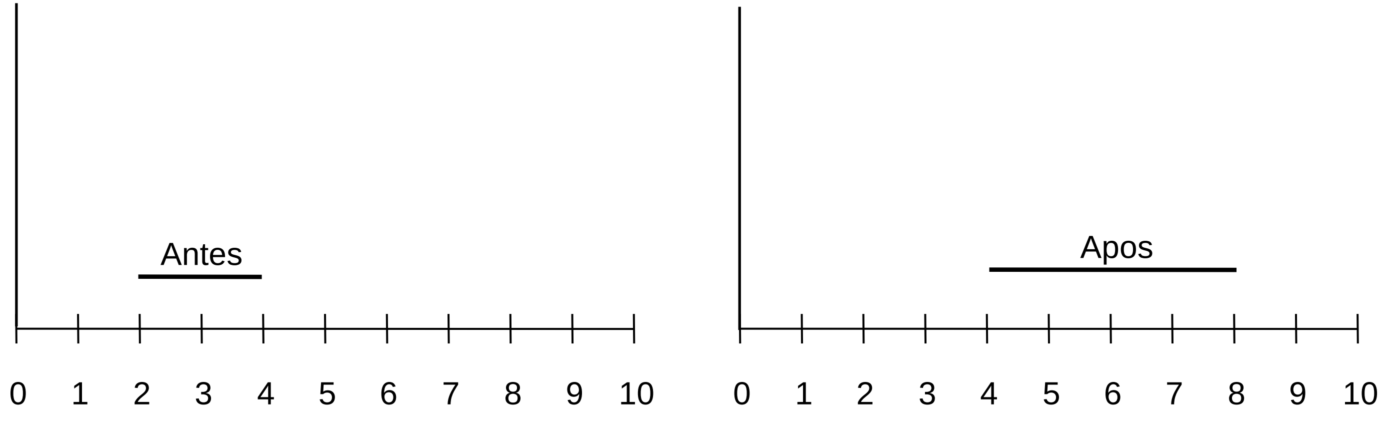
$$M = R_{30}S_{2,2}T_{3,1}$$

$$P_4 = MP_1$$

- Lembrando:
  - Multiplicação de matrizes é associativa, não comutativa!
  - Matrizes de transformação podem ser pre-multiplicadas

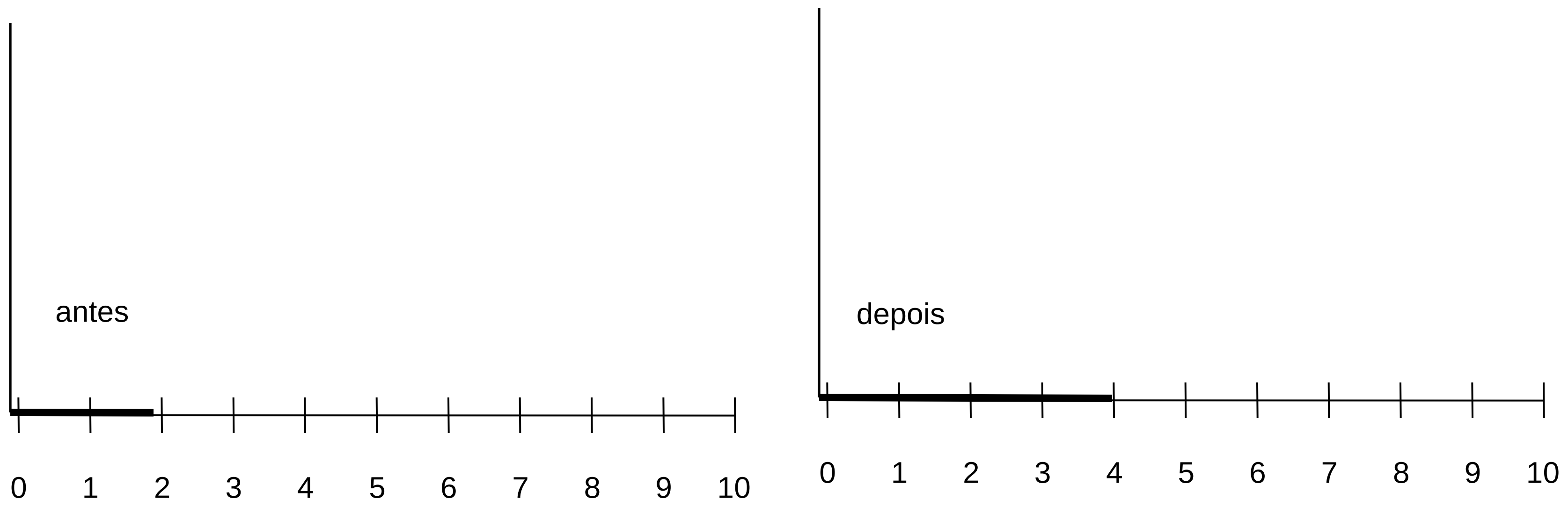
Transformações Compostas - Mudança de Escala

- Dada três transformações básicas podemos criar outras transformações.
- Mudança de escala com ponto fixo
- Um problema com a mudança de escala é que ela move o objeto que teve a escala alterada.
- *Mudança de escala na linha (2, 1) a (4,1) para duas vezes seu comprimento.*



Transformações Compostas - Mudança de Escala

- Se mudamos a escala da linha entre (0,0) e (2,0) por duas vezes, o ponto (0,0) não move.

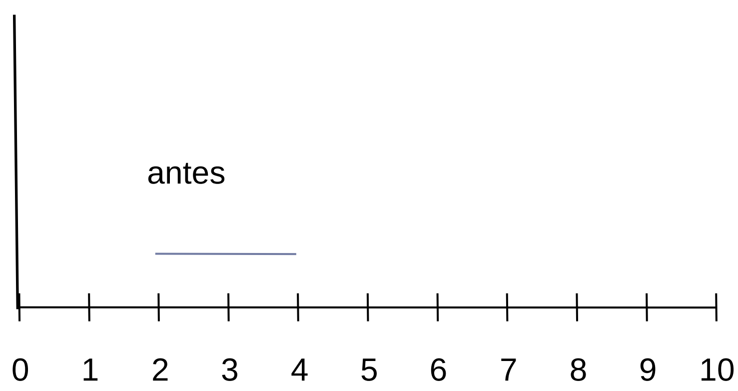


(0,0) é denominado ponto fixo para a transformação mudança de escala básica. Podemos utilizar transf. Composta para criar transf. mudança de escala com pontos fixos diferentes da origem.

Mudança de Escala - Ponto Fixo

- Escala por 2 com ponto fixo = (2,1)

  - Translade o ponto (2,1) para a origem
  - Escale por 2
  - Translade a origem para (2,1)

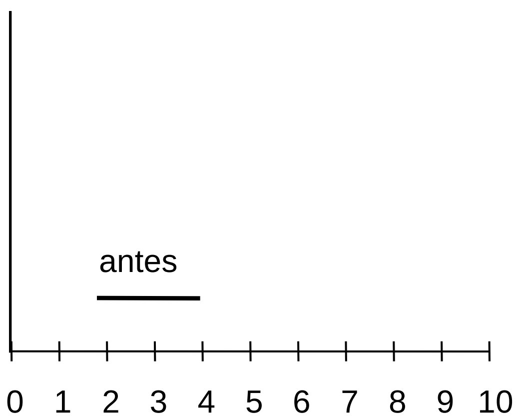


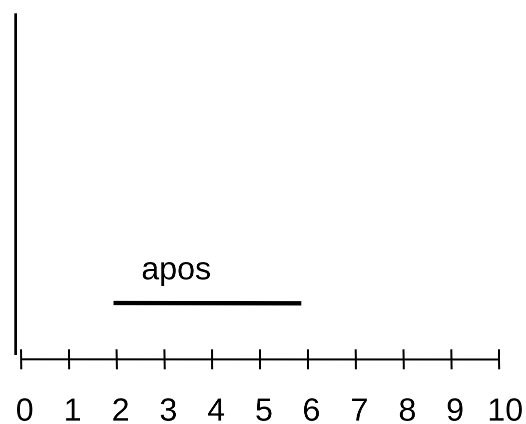
Mudança de Escala - Ponto Fixo

$$\underset{T_{2,1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{S_{2,1}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{T_{-2,-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ coord (2,1)

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ coord (6,1)





Rotação em Torno de Ponto Fixo

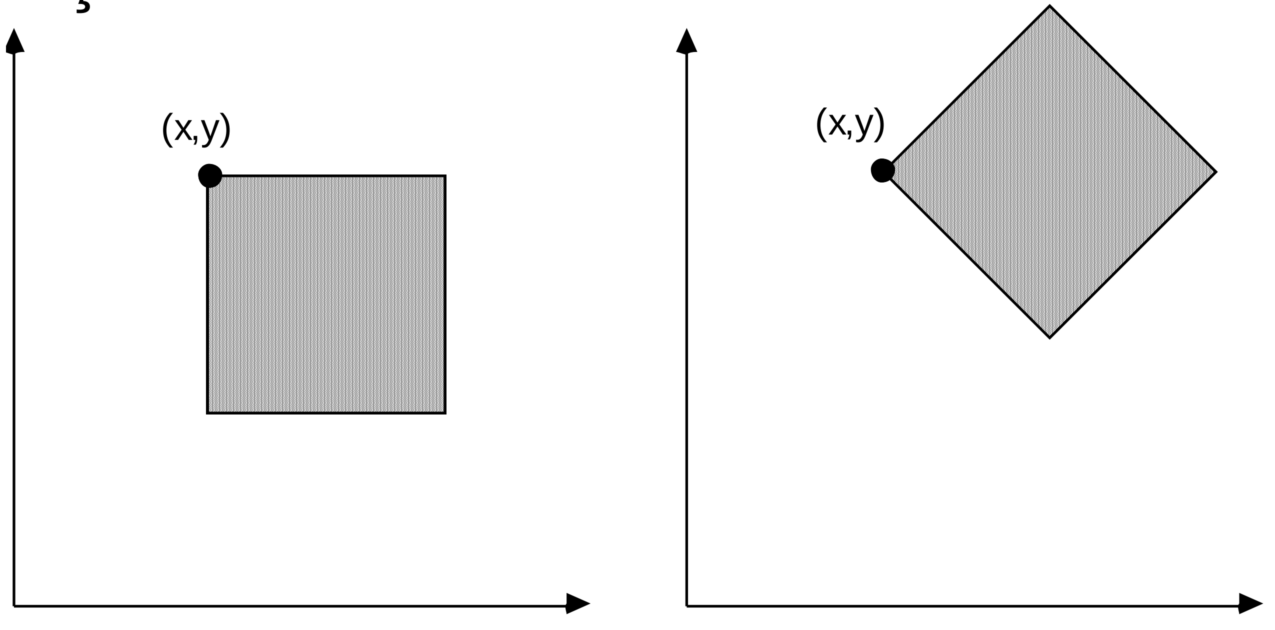
- Rotação de θ graus em torno de (x,y)

  - Translade (x,y) para origem
  - Faça a Rotação
  - Translade a origem para (x,y)

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{x,y}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_\theta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{-x,-y}}$$

Rotação em Torno de Ponto Fixo

- Posição inicial e final



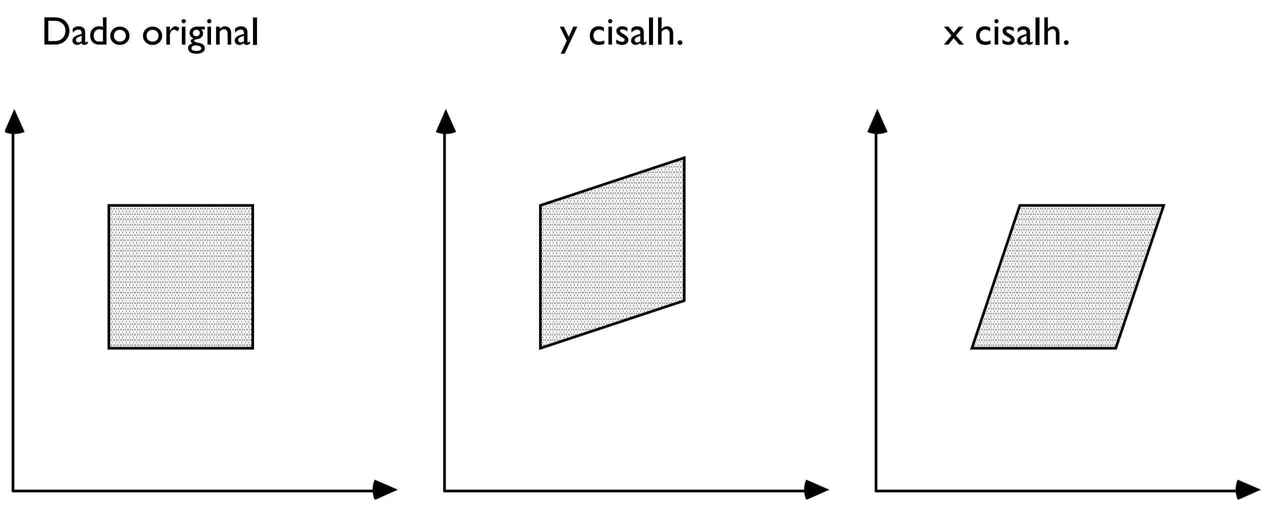
Cisalhamento

Matriz de cisalhamento em y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de cisalhamento em x

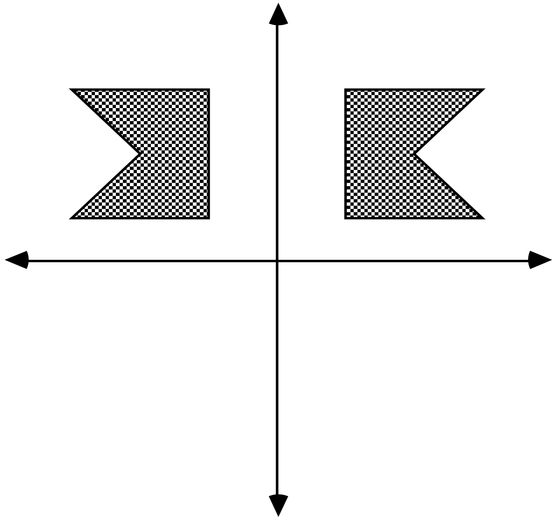
$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão - Espelhamento

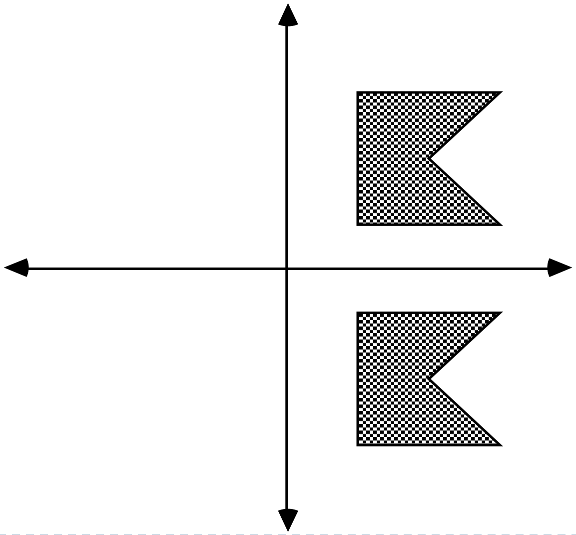
Reflexão em torno do eixo y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



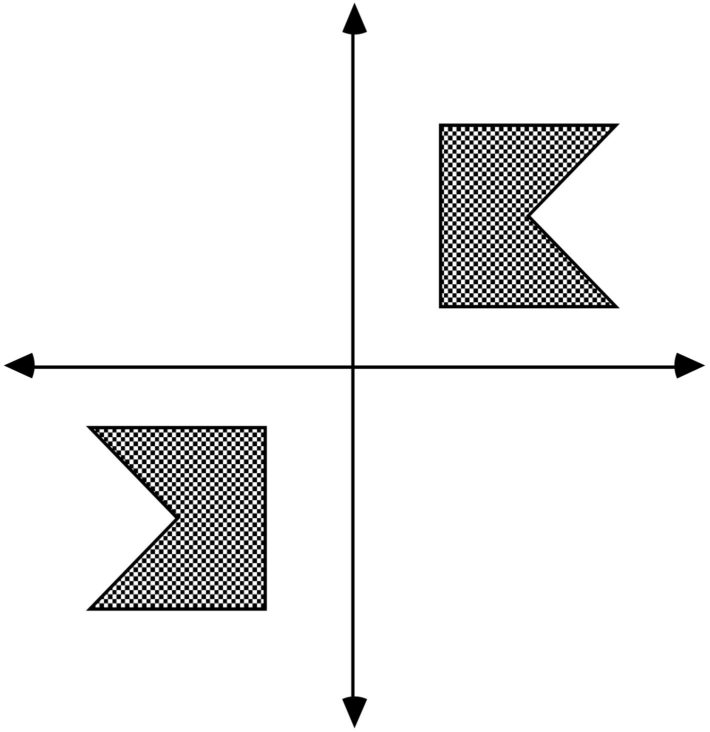
Reflexão em torno do eixo x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Mais Reflexões

Reflexão de um objeto em relação a um eixo perpendicular ao plano xy e passando na origem



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

- Casos especiais em que a comutatividade de composição de transformações são validas.

M1	M2
Translação	Translação
Escala	Escala
Rotação	Rotação
Escala (com sx=sy)	Rotação

Transformação Janela em Porta de Visão (Windows to Viewport)

- Como as primitivas são especificadas em coordenadas do mundo, o pacote gráfico precisa mapear as coordenadas do mundo em coordenadas de tela.
- Uma forma de se efetuar esta transformação é especificando uma região retangular em coordenadas do mundo.
- Uma região retangular correspondente em coordenadas de tela, chamada de Porta de Visão (Viewport).

Transformação Janela em Porta de Visão (Windows to Viewport)

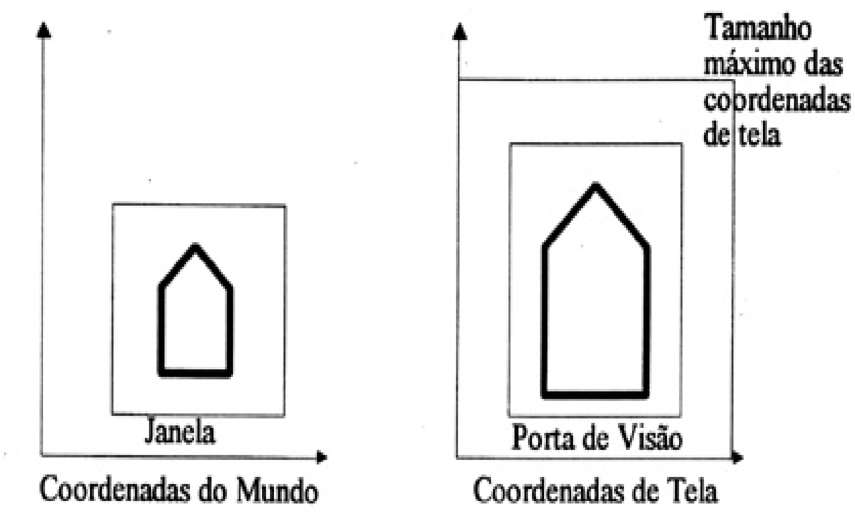
- Alguns sistemas gráficos permitem ao programador especificar primitivas de saída em um sistema de coordenadas em ponto-flutuante.

- Chamado de sistema de coordenadas do Mundo Real.

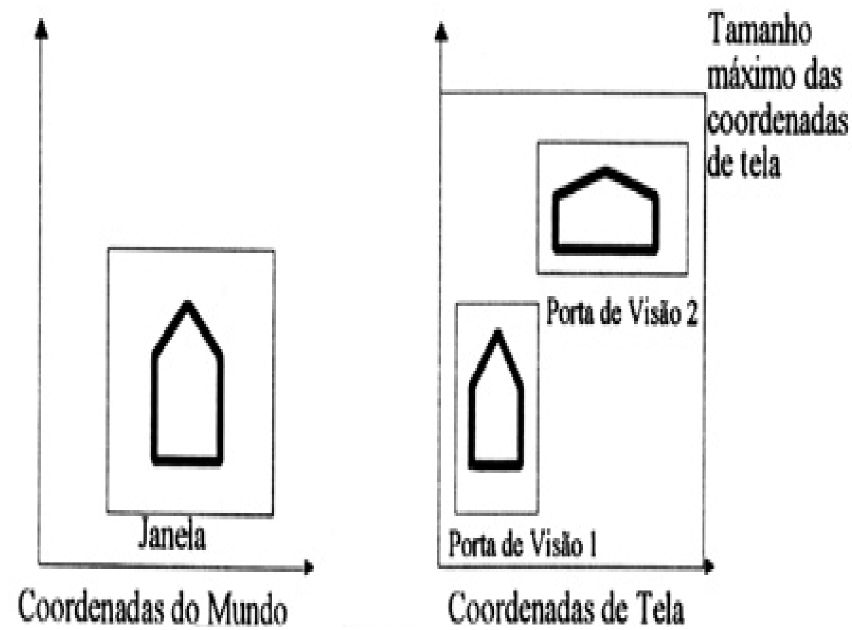
- O termo Mundo (World) é usado para representar o ambiente interativamente criado ou apresentado para o usuário.

Transformação Janela em Porta de Visão (Windows to Viewport)

- A transformação que mapeia a janela na porta de visão é aplicada a todas as primitivas de saída em coordenadas do mundo, mapeando-as na tela.



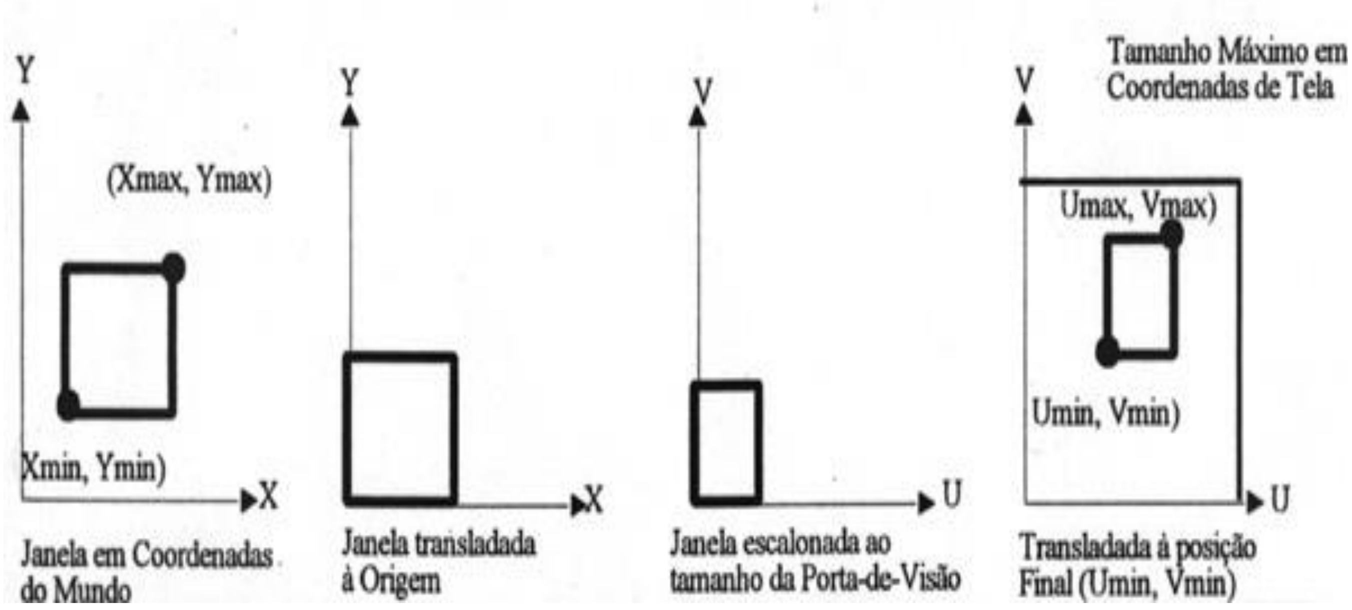
Porta de visão



Duas Portas de visão

Transformação Janela em Porta de Visão (Windows to Viewport)

- Dada uma janela e uma porta de visão, qual é a matriz de transformação que mapeia a janela em coordenadas do mundo real, na porta de visão em coordenadas de tela?



Transformação Janela em Porta de Visão (Windows to Viewport)

$$Mjp = T(u_m, v_m).S\left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}\right).T(-x_{\min}, -y_{\min}) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & u\min \\ 0 & 1 & v\min \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{u\max - u\min}{x\max - x\min} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v\max - v\min}{y\max - y\min} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x\min \\ 0 & 1 & -y\min \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alguns pacotes gráficos combinam a transformação janela - porta de visão com recorte *(clipping)* de primitivas gráficas de saída.